Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Sommersemester 2012

Wahrscheinlichkeitstheorie II - Übungsblatt 11

Abgabe bis **Donnerstag, 5.7.2012, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters der Übungsgruppe (*Daniel Altemeier (PF 161) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 11.I

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiges Submartingal bzgl. $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Zeigen Sie:

(i) $(X_t)_{t\geq 0}$ ist ein Submartingal bzgl. $\{\mathcal{F}_{t+}\}_{t\geq 0}$.

(ii) $(X_t)_{t\geq 0}$ ist ein Submartingal bzgl. der Vervollständigung der Filtrierung $\{\mathcal{F}_{t+}\}_{t\geq 0}$.

(iii) Für $\mathbb{P}$-f.a. ω ist $t \mapsto X_t(\omega)$ càdlàg.

Übungsaufgabe 11.II

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung, $T > 0$, und sei $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen des Intervalls $[0, T]$ mit $|\Delta_n| \to 0$ für $n \to \infty$ derart, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ Δ_{n+1} die Partition Δ_n verfeinert. Zeigen Sie mit Hilfe von Martingaltechniken die Aussage von Aufgabe 3.III,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 = t \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Übungsaufgabe 11.III

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung. Für $c, d > 0$ seien

$$T_c = \inf\{t > 0 \mid B_t \geq c\} \quad \text{und} \quad T_{-d} = \inf\{t > 0 \mid B_t \leq -d\} \quad \text{sowie} \quad T = \min\{T_c, T_{-d}\} .$$

Zeigen Sie für beliebiges $\alpha > 0$:

$$\mathbb{E}\Big\{e^{-\frac{\alpha^2}{2}T} 1\!\!1_{\{T=T_c\}}\Big\} = \frac{\sinh(\alpha d)}{\sinh(\alpha(c+d))} ,$$

und leiten Sie daraus die Laplace-Transformierte der Stoppzeit $\widetilde{T}_a = \inf\{t > 0 \mid |B_t| \geq a\}$ her.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß

$$\left(\exp\left(\alpha\left(B_t - \frac{c-d}{2}\right) - \frac{\alpha^2}{2}t\right)\right)_{t\geq 0}$$

ein Martingal ist. Verwenden Sie außerdem, daß fast sicher $\mathbb{1}_{\{T=T_c\}} + \mathbb{1}_{\{T=T_{-d}\}} = 1$ gilt.

Übungsaufgabe 11.IV (*Vortragsvorbereitung*)

Bereiten Sie für das Tutorium am Montag den 9.7.2012 einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die angegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Erläutern und beweisen Sie die Tatsache, daß ein Submartingal unter geeigneten Voraussetzungen fast sicher càdlàg Pfade hat.