Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Sommersemester 2012

# Wahrscheinlichkeitstheorie II - Übungsblatt 2

Abgabe bis **Donnerstag, 19.4.2012, 12:00 Uhr**

**Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters der Übungsgruppe (*Daniel Altemeier (PF 161) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.**

### Übungsaufgabe 2.I

Sei $\mathbb{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $X_0 = 0$.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ sind die Inkremente $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}, k = 2, \ldots, n$ unabhängig.

(iii) Für alle $0 \leq s < t < \infty$ ist die Zufallsvariable $X_t - X_s$ normalverteilt gemäß $\mathcal{N}(0, \sigma_{t,s}^2)$ mit $\sigma_{t,s}^2 > 0$.

Zeigen Sie, dass $\mathbb{X}$ ein Gaußprozess ist.

### Übungsaufgabe 2.II

Sei $\mathbb{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$, sind die Inkremente $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}, k = 1, \ldots, n$ unabhängig.

(ii) Für alle $0 \leq s < t < \infty$ ist die Verteilung der Inkremente $X_t - X_s$ nur von $t - s$ abhängig.

(iii) Es gelten $X_0 = 0$, $\mathbb{E}[X_t] = 0$ und $\mathbb{E}[X_t^2] = t$ für alle $t \geq 0$.

(iv) Für die Verteilung von $\mathbb{X}$ gilt folgende Skaleninvarianz: Für alle $c > 0$ ist die Verteilung von $c^{-1}X_{c^2t}$ gleich der Verteilung von $X_t$.

Zeigen Sie, dass $\mathbb{X}$ eine stetige Brownsche Bewegung ist.
*Hinweis: Zentraler Grenzwertsatz*

**Übungsaufgabe 2.III**

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Brownsche Bewegung auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie, dass der Prozess $(tB_{1/t})_{t\geq 0}$ mit der Konvention $0B_{1/0} := 0$ eine stetige Brownsche Bewegung ist.

*Hinweis: Zeigen, dass*

$$\Omega_0 = \left\{ \omega \in \Omega \,\middle|\, \lim_{t \searrow 0} tB_{1/t}(\omega) = 0 \right\} \in \mathcal{A} \qquad \textit{(Messbarkeit)}$$

*und dass folgendes gilt:* $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ *und*

$$\lim_{t \searrow 0} tB_{1/t}(\omega) = 0$$

*für alle* $\omega \in \Omega_0$. *Somit ist* $(tB_{1/t})_{t\geq 0}$ *eingeschränkt auf* $\Omega_0$ *eine stetige Brownsche Bewegung.*
*Um* $\mathbb{P}[\Omega_0]$ *zu berechnen, nutzen Sie, dass es sich bei* $(tB_{1/t})_{t>0}$ *um eine stetige Brownsche Bewegung auf* $(0, \infty)$ *handelt, und nutzen Sie Ihr Wissen, dass eine solche stetige Brownsche Bewegung auf* $[0, \infty)$ *existiert.*

**Übungsaufgabe 2.IV (1.IV) (*Vortragsvorbereitung*)**

**Bereiten Sie für das Tutorium am Montag den 30.4.2012 einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die angegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.**

Erläutern Sie die Konstruktion der Brownschen Bewegung.