Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Sommersemester 2012

Wahrscheinlichkeitstheorie II - Übungsblatt 3

Abgabe bis **Donnerstag, 26.4.2012, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters der Übungsgruppe (*Daniel Altemeier (PF 161) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 3.I

Für festes $k \in \mathbb{N}$ und für alle $N \in \mathbb{N}$ sei $X^{(N)} = \left(X_1^{(N)}, \dots, X_k^{(N)}\right)$ eine normalverteilte $\mathbb{R}^k$-wertige Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Es gelte

$$X^{(N)} \xrightarrow[N\to\infty]{(\star)} X$$

für eine $\mathbb{R}^k$-wertige Zufallsgröße X auf demselben W-Raum.

(i) $\left(\mathbb{E}[X^{(N)}]\right)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein $\mu \in \mathbb{R}^k$

(ii) $\left(\operatorname{cov}(X^{(N)})\right)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen eine positiv semidefinite Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{k\times k}$

(iii) X ist normalverteilt mit $\mathbb{E}[X] = \mu$ und $\operatorname{cov}(X) = \Sigma$.

Was ist der schwächste Konvergenzbegriff für die Konvergenz $(\star)$, so dass die Aussagen noch gelten? Zeigen Sie die Aussagen (i)-(iii) mit dem von Ihnen vorgeschlagenen Konvergenzbegriff.

Übungsaufgabe 3.II (*Brownsche Bewegung mit Drift*)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Brownsche Bewegung auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Definiere für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$

$$\mathbb{X} = (X_t)_{t\geq 0} \quad \text{mit} \quad X_t = \mu t + \sigma B_t \quad \text{für alle} \quad t \geq 0.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{X}$ ein stetiger Gauß-Prozess ist.

(ii) Bestimmen Sie für $t \geq 0$ die charakteristische Funktion von X_t.

(iii) Zeigen Sie, dass für alle $0 \leq s < t$ gilt:

$$\mathbb{E}\left[\exp(X_t - X_s)\right] = \exp\left(\mu(t-s) + \frac{1}{2}\sigma^2(t-s)\right)$$

Übungsaufgabe 3.III (*Quadratische Variation der Brownschen Bewegung*)
Sei $\mathbb{B} = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Sei $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen von $[t, t+\tau] \subset \mathbb{R}_+$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $\Delta_n = \left(t_0^{(n)}, \ldots, t_{m(n)}^{(n)}\right)$ für $m(n) \in \mathbb{N}$ und $t = t_0^{(n)} < t_2^{(n)} < \ldots < t_{m(n)}^{(n)} = t + \tau$. Sei

$$\|\Delta_n\| := \sup_{i\in 1,\ldots m(n)} t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}.$$

Es gelte $\|\Delta_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Zeigen Sie, dass

$$S_n := \sum_{k=1}^{m(n)} \left| B\left(t_k^{(n)}\right) - B\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\text{in } \mathcal{L}^2(\mathbb{P})} \tau.$$

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie die Darstellung

$$S_n - \tau = \sum_{k=1}^{m(n)} B\left(t_k^{(n)}\right) - B\left(t_{k-1}^{(n)}\right) - \mathbb{E}\left[\left(B\left(t_k^{(n)}\right) - B\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)^2\right].$$

Untersuchen Sie $\|S_n - \tau\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{P})}$, *und verwenden Sie, dass für* $t > 0$ *die Zufallsgröße* $\frac{1}{\sqrt{t}}X_t$ *standard-normalverteilt ist.*

Übungsaufgabe 3.IV (*Vortragsvorbereitung*)

Bereiten Sie für das Tutorium am Montag den 30.3.2012 einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die angegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Die Brownsche Bewegung ist fast sicher nirgends differenzierbar.