Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Sommersemester 2012

Wahrscheinlichkeitstheorie II - Übungsblatt 5

Abgabe bis **Donnerstag, 10.5.2012, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters der Übungsgruppe (*Daniel Altemeier (PF 161) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 5.I

Es seien $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten, integrierbaren Zufallsgrößen und τ eine $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$-wertige, integrierbare Stoppzeit bezüglich der von $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ induzierten Filtrierung $\big(\mathcal{A}_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie:

$$S_\tau := \sum_{k=1}^{\tau} X_k$$

ist integrierbar und es gilt

$$\mathbb{E}[S_\tau] = \mathbb{E}[\tau]\mathbb{E}[X_1].$$

Übungsaufgabe 5.II

Es sei $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ die symmetrische eindimensionale Irrfahrt, d.h.

$$S_0 = 0 \quad \text{und} \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \quad \text{für} \quad n \geq 1,$$

wobei die $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt sind mit

$$\mathbb{P}[\xi_i = \pm 1] = \frac{1}{2} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Wir fixieren ein $N \in \mathbb{N}$ und definieren $\tau := \max\big\{n \in \mathbb{N}_0 | n \leq N, S_n = 0\big\}$. Ist τ eine Stoppzeit bezüglich der Filtrierung $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_i, i \leq n)$? Begründen Sie Ihre Antwort. Hängt die Antwort vom Wert von N ab?

Übungsaufgabe 5.III

Sei $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtrierung mit

$$\mathcal{A}_t^+ := \mathcal{A}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{A}_s.$$

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine rechtsstetige $(\mathcal{A}_t^+)_{t\geq 0}$-adaptierte Familie reellwertiger ZVen und $U \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge. Wir definieren die *Ersteintrittszeit T von U* als

$$T := \inf\{t \geq 0 | X_t \in U\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass T eine $(\mathcal{A}_t^+)_{t\geq 0}$-Stoppzeit ist. Dabei hilft es z.B. festzustellen, dass wenn $T(\omega) < t$ ist, eine rationale Zahl $q < t$ existiert mit $X_q(\omega) \in U$.

(ii) Geben Sie ein konkretes Beispiel für $\Omega, (X_t)_{t\geq 0}, (\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$ und U an, für die T keine $(\mathcal{A}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeit ist.

Hinweis: Es gibt Beispiele, bei denen Ω nur zwei Elemente hat.

Übungsaufgabe 5.IV (*Vortragsvorbereitung*)

Bereiten Sie für das Tutorium am Montag den 14.5.2012 einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die angegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Eine stetige Brownsche Bewegung $\mathbb{B} = \left(B_t\right)_{t\geq 0}$ ist ein $\left(\mathcal{F}_{t+}^{\mathbb{B}}\right)_{t\geq 0}$-Markov-Prozess.