Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Sommersemester 2012

Wahrscheinlichkeitstheorie II - Übungsblatt 7 *3. Version*

Abgabe bis **Donnerstag, 31.5.2012, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters der Übungsgruppe (*Daniel Altemeier (PF 161) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 7.I

a) Sei φ eine konvexe, monoton wachsende Abbildung und $\mathbb{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal auf dem filtrierten W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $n \mapsto \mathbb{E}[\varphi(M_n)], n \in \mathbb{N}$, monoton steigt. Zeigen oder widerlegen Sie:

   (i) Ist $\mathbb{M}$ ein Submartingal, so ist $\big(\varphi(M_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal, falls $\varphi(M_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ integrierbar ist.

   (ii) Ist $\mathbb{M}$ ein Supermartingal, so ist $\big(\varphi(M_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Supermartingal, falls $\varphi(M_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ integrierbar ist.

b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, \mathbb{P})$ ein filtrierter W-Raum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Zufallsvariablen für die gilt, dass X_n jeweils $\mathcal{A}_n$-messbar ist und dass $\mathbb{E}\big[X_n|\mathcal{A}_{n-1}\big] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\mathbb{S} = (S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch

$$S_0 = 0 \quad \text{und} \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}$ ein Martingal ist.

Übungsaufgabe 7.II

Sei $\tau : \Omega \to \mathbb{N}$ eine Stoppzeit auf dem filtrierten W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, \mathbb{P})$, die beschränkt ist durch ein $C \in \mathbb{N}$. Außerdem sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}\big[X_\tau\big] \leq \mathbb{E}\big[X_C\big].$$

Übungsaufgabe 7.III

Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal auf dem filtrierten W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, \mathbb{P})$ mit $M_n \in \mathcal{L}^2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Es seien τ, σ **beschränkte** Stoppzeiten auf demselben W-Raum und es gelte $\sigma \leq \tau$. Zeigen Sie, dass M_σ und M_τ beide in $\mathcal{L}^2$ liegen und dass

$$\mathbb{E}\big[(M_\tau - M_\sigma)^2 \big| \mathcal{A}_\sigma\big] = \mathbb{E}\big[M_\tau^2 - M_\sigma^2 \big| \mathcal{A}_\sigma\big]$$

sowie

$$\mathbb{E}\big[(M_\tau - M_\sigma)^2\big] = \mathbb{E}\big[M_\tau^2 - M_\sigma^2\big].$$

Übungsaufgabe 7.IV (*Vortragsvorbereitung*)

Bereiten Sie für das Tutorium am Montag den 4.6.2012 einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die angegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Doobs optionaler Stoppsatz.