Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Sommersemester 2012

Wahrscheinlichkeitstheorie II - Übungsblatt 8

Abgabe bis **Donnerstag, 7.6.2012, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters der Übungsgruppe (*Daniel Altemeier (PF 161) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 8.I (*Ein Beweis für* Kolmogorovs 0-1 Gesetz *mit Martingaltechniken*)
Sei $\mathbb{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von unabhängigen Zufallsvariablen und sei

$$\mathcal{T} := \bigcap_{n\geq 1} \bigvee_{m\geq n} \sigma(X_m)$$

die von $\mathbb{X}$ erzeugte *terminale σ-Algebra*. Sei außerdem $\mathcal{F}_n := \sigma(X_i, 1 \leq i \leq n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie für $C \in \mathcal{T}$, dass $\mathbb{E}[\mathbb{1}_C|\mathcal{F}_n] = \mathbb{P}[C]$ fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Zeigen Sie außerdem

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_C|\mathcal{F}_n] = \mathbb{1}_C \text{ fast sicher.}$$

Leiten Sie daraus ab, dass $\mathbb{P}[C] \in \{0, 1\}$.

Übungsaufgabe 8.II (*Zufällige Vorzeichen*)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}[X_n = 1] = \mathbb{P}[X_n = -1] = \frac{1}{2} \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n$ fast sicher konvergiert, falls $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$.

Übungsaufgabe 8.III

Sei $\mathbb{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal auf einem filtrierten W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$. Das Martingal $\mathbb{X}$ heißt $\mathcal{L}^2$-beschränkt, falls $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$

a) Sei $X_n \in \mathcal{L}^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{X}$ $\mathcal{L}^2$-beschränkt ist genau dann, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\big[(X_n - X_{n-1})^2\big] < \infty.$$

b) Sei $\mathbb{X}$ $\mathcal{L}^2$-beschränkt. Zeigen Sie, dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$$

gilt, und folgern Sie daraus, dass eine $\mathcal{A}$-messbare Zufallsvariable X existiert mit

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \text{ fast sicher,}$$

und dass $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ gilt.

c) Sei $\mathbb{X}$ $\mathcal{L}^2$-beschränkt. Zeigen Sie, dass $X_n \to X$ auch in $\mathcal{L}^2$ gilt, wobei X die Zufallsgröße aus b) ist, d.h. zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[(X_n - X)^2\big] = 0.$$

Übungsaufgabe 8.IV (*Vortragsvorbereitung*)

Bereiten Sie für das Tutorium am Montag den 4.6.2012 einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die angegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Eine Übersicht von Kriterien für die Konvergenz von (Sub-/Super-) Martingalen.