Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Sommersemester 2012

Wahrscheinlichkeitstheorie II - Übungsblatt 9

Abgabe bis **Donnerstag, 21.6.2012, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters der Übungsgruppe (*Daniel Altemeier (PF 161) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 9.I

Seien $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ zwei äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem filtrierten messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$.

(i) Geben Sie ein Beispiel für äquivalente Maße $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ sowie einen stochastischen Prozess $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ an, sodass X bezüglich $\mathbb{P}$ ein Martingal ist, aber nicht bezüglich $\mathbb{Q}$.

(ii) Geben Sie ein Beispiel für äquivalente Maße $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ sowie einen stochastischen Prozess $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ an, sodass X sowohl bezüglich $\mathbb{P}$ als auch bezüglich $\mathbb{Q}$ ein Martingal ist.

Übungsaufgabe 9.II

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie unabhängiger, integrierbarer Zufallsgrößen mit $\mathbb{E}[X_n] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das Martingal $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

konvergiere $\mathbb{P}$-f.s. gegen eine integrierbare Zufallsgröße S_∞. Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen auch $\mathcal{L}_1$-Konvergenz vorliegt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathbb{E}[S_\infty - S_n|\mathcal{F}_n]$ $\mathbb{P}$-fast sicher deterministisch und unabhängig von n ist.

Übungsaufgabe 9.III

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Familie unabhängiger, identisch verteilter $\mathcal{L}_1$-Zufallsgrößen, die nicht $\mathbb{P}$-fast sicher konstant seien. Es seien

$$S_0 = 0 \quad \text{und} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k - n\mathbb{E}[X_1] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

(i) Zeigen Sie, dass das Martingal $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht in $\mathcal{L}_1$ konvergiert.

(ii) Zeigen Sie, dass für jede Stoppzeit $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ bezüglich der von $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ erzeugten Filtrierung, die $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ erfüllt, das Martingal $(S_{n\wedge\tau})_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathcal{L}_1$ gegen S_τ konvergiert und dass $\mathbb{E}[\sum_{k=1}^{\tau} X_k] = \mathbb{E}[\tau]\mathbb{E}[X_1]$ gilt.

Hinweise:

zu (i) Zeigen Sie, dass $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *keine* $\mathcal{L}_1$*-Cauchy-Folge ist.*

zu (ii) Beweisen und verwenden Sie $\mathbb{E}\big[|X_k - \mathbb{E}[X_1]|\mathbb{1}_{\{\tau\geq k\}}\big] = \mathbb{E}\big[|X_k - \mathbb{E}[X_1]|\big]\mathbb{P}[\tau \geq k]$.

Übungsaufgabe 9.IV (*Vortragsvorbereitung*)

Bereiten Sie für das Tutorium am Montag den 25.6.2012 einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die angegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Beweis des Gesetzes der großen Zahlen mit Rückwärtsmartingalen.