2. Kontinuumsmechanik:

2.1. Teilchenmechanik:

Das zentrale Objekt der Teilchenmechanik ist ein Massenpunkt (mit Masse versehener Punkt im $\mathbb{R}^3$)

m : Masse (des Massenpunktes), $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$

Der Zustand eines Massenpunktes zu einem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ wird beschrieben durch

(1) $x(t)$: Ort | Position (des Massenpunktes zur Zeit t), $x(t) \in \mathbb{R}^3$

(2) $p(t)$: Impuls (des Massenpunktes zur Zeit t), $p(t) \in \mathbb{R}^3$

Wir definieren:

$v(t) := x'(t)$: Geschwindigkeit (des Massenpunktes zur Zeit t), $v(t) \in \mathbb{R}^3$

$a(t) := x''(t)$: Beschleunigung (des Massenpunktes zur Zeit t), $a(t) \in \mathbb{R}^3$

$p(t) := m \cdot v(t) = m \cdot x'(t)$: Impuls (des Massenpunktes zur Zeit t), $p(t) \in \mathbb{R}^3$

Die Bewegung eines Massenpunktes wird durch das Newtonsche Bewegungsgesetz beschrieben

$$\boxed{F = m \cdot a = p' \quad \text{(Bewegungsgleichung)}}\ , \quad F(t, x(t), x'(t)) \in \mathbb{R}^3,\ a(t) \in \mathbb{R}^3,\ m > 0$$

Kraft = Masse · Beschleunigung = Änderung des Impulses

Die Beschreibung der Bewegung des Körpers berücksichtigt nur den Ort und die Masse, vernachlässigt jedoch Volumen und Form des Körpers (äußere Eigenschaften).

2.2. Vielteilchenmechanik:

Gegeben sei ein System von N Massenpunkten, die wir mit $i = 1, \dots, N$ durchnummerieren.
Es bezeichne:

m_i : Masse (des i-ten Teilchens), $m_i \in \mathbb{R}$, $m > 0$

$x_i(t)$: Ort | Position (des i-ten Teilchens zur Zeit t), $x_i(t) \in \mathbb{R}^3$

f_i : auf i-tes Teilchen wirkende Gesamtkraft (zur Zeit t), $f_i = f_i(t, x_i(t), x_i'(t)) \in \mathbb{R}^3$

$f_i^{(ex)}$: auf i-tes Teilchen wirkende äußere Kraft (zur Zeit t), $f_i^{(ex)} = f_i^{(ex)}(t, x_i(t), x_i'(t)) \in \mathbb{R}^3$

f_{ij} : innere Kraft, die vom j-ten Teilchen auf das i-te zur Zeit t ausgeübt wird ($\hat{=}$ Wechselkraft), $f_{ij} = f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t), x_i'(t), x_j'(t)) \in \mathbb{R}^3$, $i \neq j$

$p_i(t)$: Impuls (des i-ten Teilchens zur Zeit t), $p_i(t) \in \mathbb{R}^3$

Wir definieren (analog zu oben):

$v_i(t) := x_i'(t)$: Geschwindigkeit (des i-ten Teilchens zur Zeit t), $v_i(t) \in \mathbb{R}^3$

$a_i(t) := x_i''(t)$: Beschleunigung (des i-ten Teilchens zur Zeit t), $a_i(t) \in \mathbb{R}^3$

(3) $p_i(t) := m_i \cdot v_i(t) = m_i \cdot x_i'(t)$: Impuls (des i-ten Teilchens zur Zeit t), $p_i(t) \in \mathbb{R}^3$

2. Newtonsches Gesetz: (lex secunda, Bewegungsgesetz)

(4)
$$\boxed{p_i' = f_i := \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} f_{ij} + f_i^{(ex)}\ , \quad i = 1, \dots, N}$$

Änderung des Impulses des i-ten Teilchens = auf i-tes Teilchen wirkende Gesamtkraft = Summe der auf i-tes Teilchen wirkende innere Kräfte + auf i-tes Teilchen wirkende äußere Kraft

3. Newtonsches Gesetz: (lex tertia, Reaktionsprinzip)

(5)
$$\boxed{f_{ij} = -f_{ji}\ , \quad i, j = 1, \dots, N\ , \quad i \neq j}$$

$f_{ii} := 0$

Das 3. Newtonsche Gesetz ist für Zentralkräfte der Form

(6) $$f_{ij}(x_i, x_j) = \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|} \cdot g_{ij}(|x_i - x_j|) \quad , \quad x_i, x_j \in \mathbb{R}^3$$

mit
$$f_{ij} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \; , \; g_{ij} : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \; g_{ij}(s) = g_{ji}(s) \quad \forall s > 0$$

erfüllt. Wir nehmen für den weiteren Verlauf an, dass die Wechselkräfte f_{ij} von dieser Form sind. Die Wechselwirkung ist

- abstoßend $\iff$ $g_{ij}(s) > 0 \quad \forall s > 0$
- anziehend $\iff$ $g_{ij}(s) < 0 \quad \forall s > 0$

Beispiel 2.1: (Zentralkräfte)

a) (Gravitationskräfte). Wirken zwischen den Teilchen Gravitationskräfte, so gilt

$$g_{ij}(s) = -G \cdot \frac{m_i \cdot m_j}{s^2} \quad \left(\begin{array}{c}\text{Newtonsches} \\ \text{Gravitationsgesetz}\end{array}\right), \quad G \approx 6.67384 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg}$$

(Gravitationskonstante)

Es gilt:

- $g_{ij}(s) < 0 \quad \forall s > 0 \Rightarrow$ Wechselwirkung f_{ij} anziehend

b) (Elektrische Kräfte). Wirken zwischen den Teilchen elektrische Kräfte, so gilt

$$g_{ij}(s) = K \cdot \frac{Q_i \cdot Q_j}{s^2} \quad \left(\begin{array}{c}\text{Coulombsches} \\ \text{Gesetz}\end{array}\right), \quad K > 0 \text{ (Proportionalitätsfaktor)}, \quad Q_i, Q_j \in \mathbb{R} \text{ (Ladung des i-ten, j-ten Teilchens)}$$

Es gilt:

- $Q_i Q_j < 0 \Rightarrow g_{ij}(s) < 0 \;\forall s > 0 \Rightarrow$ Wechselwirkung ist anziehend
  (Teilchen haben unterschiedliche Ladung, d.h. $\operatorname{sgn} Q_i \neq \operatorname{sgn} Q_j$)
- $Q_i Q_j > 0 \Rightarrow g_{ij}(s) > 0 \;\forall s > 0 \Rightarrow$ Wechselwirkung ist abstoßend
  (Teilchen haben gleiche Ladung, d.h. $\operatorname{sgn} Q_i \neq \operatorname{sgn} Q_j$)

Im Folgenden behandeln wir einige Erhaltungssätze. Sie beschreiben physikalische Größen (z.B. Impuls, Drehimpuls, Energie), die nur durch Einwirkung von außen verändert werden können. Ohne äußere Einwirkungen bleiben diese Größen im zeitlichen Verlauf der Bewegung konstant.

2.2.1. Impulserhaltung:

Wir definieren:

(7) $$m := \sum_{i=1}^{N} m_i \quad (\text{Gesamtmasse}), \quad m \in \mathbb{R}, \; m > 0$$

(8) $$x(t) := \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i x_i(t) \quad (\text{Schwerpunkt, Massenmittelpunkt}), \quad x(t) \in \mathbb{R}^3$$

(9) $$f^{(ex)} := \sum_{i=1}^{N} f_i^{(ex)} \quad \left(\begin{array}{c}\text{äußere} \\ \text{Gesamtkraft}\end{array}\right), \quad f^{(ex)} \in \mathbb{R}^3$$

(10) $$p(t) := \sum_{i=1}^{N} p_i(t) \quad (\text{Gesamtimpuls}), \quad p(t) \in \mathbb{R}^3$$

so gilt (in Analogie zu (2))

(11) $$p(t) \underset{(10)}{=} \sum_{i=1}^{N} p_i(t) \underset{(3)}{=} m \cdot \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i x_i'(t) \underset{(7),(8)}{=} m \cdot x'(t)$$

Satz 2.2: (Impulserhaltungssatz)

Seien (4) und (5) erfüllt, dann gilt

(12) $$\boxed{\text{Impulsbilanz, Impulserhaltungsgleichung:} \quad p'(t) = f^{(ex)}(t)}$$

Änderung des Gesamtimpulses = Summe aller äußerer Kräfte, die auf das System wirken

D.h.: Liegen keine äußeren Kräfte vor (d.h. $f_i^{(ex)} = 0 \; \forall i \Rightarrow f^{(ex)} = 0$), so ist der Gesamtimpuls konstant in der Zeit.

Beweis:
Es gilt

$$p'(t) \underset{(10)}{=} \sum_{i=1}^{N} p_i'(t) \underset{(4)}{=} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} f_{ij}}_{\underset{(5)}{=0}} + \sum_{i=1}^{N} f_i^{(ex)} \underset{(8)}{=} f^{(ex)}$$

denn

(13) $$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} f_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} f_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} f_{ij} \underset{(5)}{=} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} f_{ij} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} f_{ji} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} f_{ij} - \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=j+1}^{N} f_{ij}$$

$$\underset{\substack{\text{Summe}\\\text{vertauschen}}}{=} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} f_{ij} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} f_{ij} = 0 \quad \blacksquare$$

2.2.2. Drehimpulserhaltung:

Wir definieren für einen (ruhenden) Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$: $\left(v \times w := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}, v, w \in \mathbb{R}^3 \right)$ Kreuzprodukt, Vektorprodukt

(14) $L_i(t) := (x_i(t) - x_0) \times p_i(t)$ (Drehimpuls des i-ten Teilchens zur Zeit t), $L_i(t) \in \mathbb{R}^3$

(15) $M_i^{(ex)}(t) := (x_i(t) - x_0) \times f_i^{(ex)}$ (äußeres Drehmoment des i-ten Teilchens zur Zeit t), $M_i^{(ex)}(t) \in \mathbb{R}^3$

(16) $L(t) := \sum_{i=1}^{N} L_i(t)$ (Gesamtdrehimpuls zur Zeit t), $L(t) \in \mathbb{R}^3$

(17) $M^{(ex)}(t) := \sum_{i=1}^{N} M_i^{(ex)}(t)$ (äußeres Gesamtdrehmoment zur Zeit t), $M^{(ex)}(t) \in \mathbb{R}^3$

Satz 2.3: (Drehimpulserhaltungssatz)

Seien (4) und (5) erfüllt und f_{ij} Zentralkräfte der Form (6), dann gilt

Drehimpulsbilanz, Drehimpulserhaltungsgleichung:

(18) $$\boxed{L'(t) = M^{(ex)}(t)}$$

Änderung des Gesamtdrehimpulses = Summe aller äußeren Drehmomente

D.h.: Liegen keine äußeren Drehmomente vor (d.h. $M_i^{(ex)} = 0 \ \forall i \Rightarrow M^{(ex)} = 0$), so ist der Gesamtdrehimpuls konstant in der Zeit.

Beweis:

$$L'(t) \underset{(16)}{=} \sum_{i=1}^{N} L_i'(t) \underset{\substack{(14)\\(PR)}}{=} \sum_{i=1}^{N} \Bigg[\underbrace{\Big(x_i'(t) \times \underbrace{p_i(t)}_{\underset{(3)}{=} m_i x_i'(t)} \Big)}_{=0} + \Big((x_i(t) - x_0) \times \underbrace{p_i'(t)}_{\underset{(4)}{=} \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} f_{ij} + f_i^{(ex)}} \Big) \Bigg]$$

$$\underset{\times \text{ bilinear}}{=} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} (x_i(t) - x_0) \times f_{ij} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underbrace{(x_i(t) - x_0) \times f_i^{(ex)}}_{\underset{(15)}{=} M_i^{(ex)}(t)}}_{\underset{(17)}{=} M^{(ex)}(t)}$$

$$\underset{\times \text{ bilinear}}{=} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} x_i(t) \times f_{ij} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} x_0 \times f_{ij} + M^{(ex)}(t)$$

$$\underset{\times \text{ bilinear} \,\&\, (6)}{=} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} x_i(t) \times \frac{x_i(t) - x_j(t)}{|x_i(t) - x_j(t)|} \cdot g_{ij}(|x_i(t) - x_j(t)|) - \underbrace{x_0 \times \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} f_{ij}}_{\underset{(13)}{=0}} \Big)}_{=0} + M^{(ex)}(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{(x_i(t)\times x_i(t)) - (x_i(t)\times x_j(t))}{|x_i(t)-x_j(t)|} \cdot g_{ij}(|x_i(t)-x_j(t)|) + M^{(ex)}(t)$$

× bilinear

$$= -\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{x_i(t)\times x_j(t)}{|x_i(t)-x_j(t)|} \cdot g_{ij}(|x_i(t)-x_j(t)|) + M^{(ex)}(t)$$

$y \times y = 0$

$$= -\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \left[\frac{x_i(t)\times x_j(t)}{|x_i(t)-x_j(t)|} \cdot g_{ij}(|x_i(t)-x_j(t)|) + \frac{\overbrace{x_j(t)\times x_i(t)}^{\substack{\times \text{ antisymmetrisch} \\ = -(x_i(t)\times x_j(t))}}}{\underbrace{|x_j(t)-x_i(t)|}_{=|x_i(t)-x_j(t)|}} \cdot \underbrace{g_{ji}(\underbrace{|x_j(t)-x_i(t)|}_{=|x_i(t)-x_j(t)|})}_{\substack{=g_{ij}(|x_i(t)-x_j(t)|) \\ g_{ij}=g_{ji} \text{ (vgl. (6))}}} \right]}_{=0} + M^{(ex)}(t)$$

$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} h_{ij} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}(h_{ij}+h_{ji})$, (vgl. (13))

verwende $g_{ij}=g_{ji}$

$$= M^{(ex)}(t) \quad \blacksquare$$

2.2.3. Energieerhaltung:

W definieren:

(19) $$E_{kin}(t) := \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{|x_i'(t)|^2}{2}$$ (Kinetische Energie), $E_{kin}(t)\in\mathbb{R}$, $E_{kin}(t)\geq 0$

(20) $$W(t) := \sum_{i=1}^{N} x_i'(t)\cdot f_i^{(ex)}(t)$$ (Leistung, von den äußeren Kräften verrichtete Arbeit)

(21) $$E_{pot}(t) := -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} G_{ij}(|x_i(t)-x_j(t)|)$$ (potentielle Energie)

(22) $$E(t) := E_{kin}(t) + E_{pot}(t)$$ (Gesamtenergie),

wobei G_{ij} eine Stammfunktion von g_{ij} bezeichnet.

Satz 2.4: (Energieerhaltungssatz)

Sei (4) und (5) erfüllt und f_{ij} Zentralkräfte der Form (6), dann gilt

Energiebilanz, Energieerhaltungsgleichung

(23) $$\boxed{E'(t) = W(t)}$$

Änderung der Gesamtenergie = Summe der von den äußeren Kräften verrichtete Arbeit

D.h.: Liegen keine äußeren Kräfte vor (d.h. $f_i^{(ex)} = 0 \ \forall t \Rightarrow W=0$), so ist die Gesamtenergie konstant in der Zeit.

Beweis:

$$E_{kin}'(t) \underset{\substack{(19)\\(PR)}}{=} \sum_{i=1}^{N} \cancel{m_i}\Big(x_i'(t)\cdot \underbrace{x_i''(t)}_{\underset{(3)}{=}\frac{1}{\cancel{m_i}}\cdot p_i'(t)}\Big) \underset{(4)}{=} \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} x_i'(t)\cdot f_{ij} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} x_i'(t)\cdot f_i^{(ex)}}_{\underset{(20)}{=} W(t)}$$

$$\underset{(6)}{=} \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} x_i'(t)\cdot \frac{x_i(t)-x_j(t)}{|x_i(t)-x_j(t)|}\cdot g_{ij}(|x_i(t)-x_j(t)|) + W(t)$$

$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} h_{ij} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}(h_{ij}+h_{ji})$

$$\underset{g_{ij}=g_{ji}}{=} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1} \frac{(x_i'(t)-x_j'(t))\cdot(x_i(t)-x_j(t))}{|x_i(t)-x_j(t)|}\cdot g_{ij}(|x_i(t)-x_j(t)|) + W(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} g_{ij}(|x_i(t) - x_j(t)|) \left[\frac{d}{dt} |x_i(t) - x_j(t)|\right] + w(t)$$

$$\underset{(KR)}{=} \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} G_{ij}(|x_i(t) - x_j(t)|) \right] + W(t)$$

$$\underset{\substack{\text{Vgl. (13)} \\ \& G_{ij}=G_{ji} \\ (\text{da } g_{ij}=g_{ji})}}{=} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} G_{ij}(|x_i(t) - x_j(t)|) \right] + w(t)$$

$$\underset{(21)}{=} - E_{pot}'(t) + w(t)$$

also

$$E'(t) = E_{kin}'(t) + E_{pot}'(t) = W(t) \qquad \blacksquare$$

Bemerkung 2.5: (Massenerhaltung)

Beachte, dass wir für die Erhaltungssätze stillschweigend die

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Massenerhaltung:} \\ \frac{d}{dt} m_i = 0 \qquad , \; i = 1, \dots, N, \end{array}} \qquad (2..)$$

vorausgesetzt haben. Diese besagt, dass die Masse der einzelnen Massenpunkte konstant in der Zeit ist, also erhalten bleibt.

2.3. Übergang von der Teilchenmechanik zum Kontinuum:

Gegeben sei erneut ein System von N Massenpunkten, die (24) erfüllen und sich entsprechend (4) und (5) verhalten, wobei f_{ij} durch (6) gegeben sei.

Für den Übergang zum Kontinuum werden die Massen der N Massenpunkte mit Hilfe einer Kernfunktion „gemittelt", um so zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ eine „gemittelte Massendichte" zu erhalten, die über dem Gesamtraum $\mathbb{R}^3$ definiert ist.

Als Kernfunktion verwenden wir die 3-dimensionale

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Gaußsche Normalverteilung: } \Psi_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \Psi_s(x) := (2\pi s^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{2s^2}} \;, \; s > 0, \; x \in \mathbb{R}^3, \; |x|^2 := \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \end{array}} \qquad (25)$$

mit geeigneter Standardabweichung $s > 0$ und der Normierungseigenschaft

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Psi_s(x)\, dx = 1 \qquad \forall s > 0. \qquad (26)$$

2.3.1. Massenerhaltung:

Wir definieren:

$$\varrho_s(x,t) := \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \Psi_s(x - x_i(t)) \quad (\text{gemittelte Massendichte}), \; \varrho_s(x,t) \in \mathbb{R} \qquad (27)$$

$$\begin{aligned} p_s(x,t) &:= \sum_{i=1}^{N} p_i(t) \cdot \Psi_s(x - x_i(t)) \quad (\text{gemittelte Impulsdichte}), \; p_s(x,t) \in \mathbb{R}^3 \qquad (28) \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot x_i'(t) \cdot \Psi_s(x - x_i(t)) \end{aligned}$$

Falls $\varrho_s(x,t) > 0$ für alle (x,t) gilt, dann definiere

$$v_s(x,t) := \frac{p_s(x,t)}{\varrho_s(x,t)} \quad (\text{gemittelte Geschwindigkeit}), \; v_s(x,t) \in \mathbb{R}^3 \qquad (29)$$

Satz 2.6: (Massenerhaltungssatz)

Es gilt die

Massenbilanz, Massenerhaltungsgleichung:

(30) $$\boxed{\partial_t \varrho_s(x,t) + \operatorname{div}\left(p_s(x,t)\right) = 0.}$$

Gilt zusätzlich $\varrho_s(x,t) > 0$ für alle (x,t), so ist (30) wegen (29) äquivalent zu

(31) $$\boxed{\partial_t \varrho_s(x,t) + \operatorname{div}\left(\varrho_s(x,t)\, v_s(x,t)\right) = 0.}$$

Beweis:

$$\partial_t \varrho_s(x,t) \underset{(27)}{=} \partial_t \sum_{i=1}^{N} m_i\, \psi_s(x - x_i(t)) \underset{(KR)}{=} -\sum_{i=1}^{N} m_i\, D\psi_s(x - x_i(t))\, x_i'(t)$$

$$\underset{(3)}{=} -\sum_{i=1}^{N} D\psi_s(x - x_i(t))\, p_i(t) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\psi_s\right)(x - x_i(t)) \cdot \left(p_i(t)\right)_j$$

$$\underset{\substack{\text{Summen}\\ \text{vertauschen}}}{=} -\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{N} p_i(t)\, \psi_s(x - x_i(t))\right)_j \underset{(28)}{=} -\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(p_s(x,t)\right)_j$$

$$= -\operatorname{div}\left(p_s(x,t)\right) \qquad \blacksquare$$

2.3.2. Impulserhaltung:

Wir definieren:

(32) $$\tilde{f}_s^{(ex)}(x,t) := \sum_{i=1}^{N} f_i^{(ex)}(t)\, \psi_s(x - x_i(t)) \quad \text{(gemittelte Kraftdichte)}, \quad f_s^{(ex)}(x,t) \in \mathbb{R}^3$$

(33) $$\sigma_s(x,t) := -\sum_{i=1}^{N} \frac{\left(p_i(t) - m_i v_s(x,t)\right)\left(p_i(t) - m_i v_s(x,t)\right)^T}{m_i}\, \psi_s(x - x_i(t))$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\left[f_{ij}(t)\left(x_i(t) - x_j(t)\right)^T \int_0^1 \psi_s\left(x - (1-\tau)x_i(t) - \tau x_j(t)\right) d\tau\right]$$
$$\text{(Spannungstensor)}, \quad \sigma_s(x,t) \in \mathbb{R}^{3,3}$$

(34) $$f_s^{(ex)}(x,t) := \frac{1}{\varrho_s(x,t)} \cdot \sum_{i=1}^{N} f_i^{(ex)}(t)\, \psi_s(x - x_i(t)) \quad \text{(spezifische Kraftdichte)},$$

(35) $$\tilde{Q}_s(x,t) := \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(t)\, p_i^T(t)}{m_i}\, \psi_s(x - x_i(t)) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} f_{ij}(t)\left(x_i(t) - x_j(t)\right)^T \int_0^1 \psi_s\left(x - (1-\tau)x_i(t) - \tau x_j(t)\right) d\tau,$$
$$\tilde{Q}_s(x,t) \in \mathbb{R}^{3,3}$$

Beachte die abkürzende Notation: $f_{ij}(t) = f_{ij}(x_i(t), x_j(t))$.

Satz 2.7: (Impulserhaltungssatz)

Es gilt die

Impulsbilanz, Impulserhaltungsgleichung:

(36) $$\boxed{\partial_t p_s(x,t) + \operatorname{div}\left(\tilde{Q}_s(x,t)\right) = \tilde{f}_s^{(ex)}(x,t).}$$

Gilt zusätzlich $\varrho_s(x,t) > 0$ für alle (x,t), so ist (36) äquivalent zu

(37) $$\boxed{\partial_t\left(\varrho_s(x,t)\, v_s(x,t)\right) + \operatorname{div}\left(\varrho_s(x,t)\, v_s(x,t)\, v_s^T(x,t)\right) - \operatorname{div}\left(\sigma_s(x,t)\right) = \varrho_s(x,t)\, f_s^{(ex)}(x,t).}$$

Beweis:

(38) • $$\partial_t \rho_s(x,t) \underset{\substack{(28)\\(PR)}}{=} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} p_i'(t)\,\psi_s(x-x_i(t))}_{=:T_1} - \underbrace{\sum_{i=1}^{N} p_i(t)\, D\psi_s(x-x_i(t))\, x_i'(t)}_{=:T_2} =: T_1 - T_2$$

(39) • $$T_1 := \sum_{i=1}^{N} p_i'(t)\psi_s(x-x_i(t)) \underset{(4)}{=} \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} f_{ij}(t)\psi_s(x-x_i(t))}_{=:T_3} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} f_i^{(ex)}(t)\psi_s(x-x_i(t))}_{\underset{(32)}{=}\tilde{f}_s^{(ex)}(x,t)}$$
$$= T_3 + \tilde{f}_s^{(ex)}(x,t)$$

(40) • $$T_3 := \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} f_{ij}(t)\psi_s(x-x_i(t))$$
$$\underset{a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}{=} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} f_{ij}(t)\psi_s(x-x_i(t)) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} f_{ij}(t)\psi_s(x-x_i(t))$$
$$\underset{\substack{\text{Summations-}\\\text{index umbenennen}}}{=} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} f_{ij}(t)\psi_s(x-x_i(t)) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{N} \underbrace{f_{ji}(t)}_{\underset{(5)}{=}-f_{ij}(t)}\psi_s(x-x_j(t))$$
$$\underset{\substack{\text{Summen}\\\text{vertauschen}}}{=} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} f_{ij}(t)\Big(\psi_s(x-x_i(t)) - \psi_s(x-x_j(t))\Big)$$

Taylorentwicklung der Ordnung 0 von ψ_s am Entwicklungspunkt $a := x-x_i(t)$

$$\psi_s(x-x_j(t)) = \psi_s(x-x_i(t)) + \int_0^1 D\psi_s\big((1-\tau)\cdot(x-x_i(t)) + \tau(x-x_j(t))\big)\,d\tau \cdot \big((x-x_j(t)) - (x-x_i(t))\big)$$
$$= \psi_s(x-x_i(t)) + \int_0^1 D\psi_s\big(x-(1-\tau)x_i(t) - \tau x_j(t)\big)\,d\tau\,\big(x_i(t)-x_j(t)\big)$$

$$\underset{\substack{\text{Taylorentw.}\\\text{von }\psi_s}}{=} -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} f_{ij}(t)\int_0^1 D\psi_s\big(x-(1-\tau)x_i(t)-\tau x_j(t)\big)\,d\tau\,\big(x_i(t)-x_j(t)\big)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} f_{ij}(t)\int_0^1 \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\psi_s\big(x-(1-\tau)x_i(t)-\tau x_j(t)\big)\,\big(x_i(t)-x_j(t)\big)_k\,d\tau$$
$$\underset{\substack{k\text{-Summe}\\\text{nach außen}}}{=} -\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} f_{ij}(t)\,\big(x_i(t)-x_j(t)\big)_k \int_0^1 \psi_s\big(x-(1-\tau)x_i(t)-\tau x_j(t)\big)\,d\tau\right)$$
$$\underset{\substack{\text{Definition}\\\text{Matrixdivergenz}}}{=} -\operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} f_{ij}(t)\,\big(x_i(t)-x_j(t)\big)^T \int_0^1 \psi_s\big(x-(1-\tau)x_i(t)-\tau x_j(t)\big)\,d\tau\right)$$

(41) • $$T_2 := \sum_{i=1}^{N} p_i(t)\,D\psi_s(x-x_i(t))\,x_i'(t) \underset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{N} p_i(t)\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\psi_s(x-x_i(t))\left(\frac{1}{m_i}p_i(t)\right)_k$$
$$= \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{N} p_i(t)\,(p_i(t))_k\,\psi_s(x-x_i(t))\,\frac{1}{m_i}\right)$$
$$\underset{\substack{\text{Definition}\\\text{Matrixdivergenz}}}{=} \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(t)\,p_i^T(t)}{m_i}\,\psi_s(x-x_i(t))\right)$$

Daraus folgt (36):

(42) • $$\partial_t \rho_s(x,t) \underset{(38)}{=} T_1 - T_2 \underset{(39)}{=} -T_2 + T_3 + \tilde{f}_s^{(ex)}(x,t)$$

$$\underset{\substack{(40)\\(41)}}{=} -\mathrm{div}\Bigg(\underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{p_i(t)\,p_i^T(t)}{m_i}\,\psi_s(x-x_i(t)) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^N f_{ij}(t)\,(x_i(t)-x_j(t))^T\int_0^1 \psi_s(x-(1-\tau)x_i(t)-\tau x_j(t))\,d\tau}_{\underset{(35)}{=}\tilde{Q}_s(x,t)}\Bigg) + \tilde{f}_s^{(ex)}(x,t)$$

$$\underset{(35)}{=} -\mathrm{div}\big(\tilde{Q}_s(x,t)\big) + \tilde{f}_s^{(ex)}(x,t)$$

Sei nun zusätzlich $\varrho_s(x,t) > 0$ für alle (x,t), dann gilt weiter:

(43) • $$\tilde{f}_s^{(ex)}(x,t) \underset{\varrho_s(x,t)>0}{=} \varrho_s(x,t)\cdot \underbrace{\frac{1}{\varrho_s(x,t)}\cdot \tilde{f}_s^{(ex)}(x,t)}_{\underset{(34)}{=} f_s^{(ex)}(x,t)} = \varrho_s(x,t)\cdot f_s^{(ex)}(x,t)$$

(44) • $$\partial_t \rho_s(x,t) \underset{\substack{(29)\\ \varrho_s(x,t)>0}}{=} \partial_t\big(\varrho_s(x,t)\,v_s(x,t)\big)$$

(45) • $$\sum_{i=1}^N \frac{(p_i(t)-m_i v_s(x,t))(p_i(t)-m_i v_s(x,t))^T}{m_i}\,\psi_s(x-x_i(t))$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{p_i(t)\,p_i^T(t)}{m_i}\,\psi_s(x-x_i(t)) - \sum_{i=1}^N \frac{\cancel{m_i}\, v_s(x,t)\,p_i^T(t)}{\cancel{m_i}}\,\psi_s(x-x_i(t)) - \sum_{i=1}^N \frac{\cancel{m_i}\, p_i(t)\,v_s^T(x,t)}{\cancel{m_i}}\,\psi_s(x-x_i(t))$$

$$+ \sum_{i=1}^N \frac{m_i^{\cancel{2}}\, v_s(x,t)\,v_s^T(x,t)}{\cancel{m_i}}\,\psi_s(x-x_i(t))$$

$$\underset{(27),(28)}{=} \sum_{i=1}^N \frac{p_i(t)\,p_i^T(t)}{m_i}\,\psi_s(x-x_i(t)) - \underbrace{v_s(x,t)\,\rho_s^T(x,t)}_{\underset{\substack{(29)\\ \varrho_s(x,t)>0}}{=} \varrho_s(x,t)\,v_s(x,t)\,v_s^T(x,t)} \underbrace{- \rho_s(x,t)\,v_s^T(x,t) + \varrho_s(x,t)\,v_s(x,t)\,v_s^T(x,t)}_{= \underbrace{(\varrho_s(x,t)\,v_s(x,t) - \rho_s(x,t))}_{\underset{(29),\ \varrho_s(x,t)>0}{=0}}\, v_s^T(x,t)}$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{p_i(t)\,p_i^T(t)}{m_i}\,\psi_s(x-x_i(t)) - \varrho_s(x,t)\,v_s(x,t)\,v_s^T(x,t)$$

Daraus folgt (37):

$$\partial_t\big(\varrho_s(x,t)\,v_s(x,t)\big) \underset{\substack{(42)\\(44)}}{=} -\mathrm{div}\Bigg(\sum_{i=1}^N \frac{p_i(t)\,p_i^T(t)}{m_i}\,\psi_s(x-x_i(t)) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^N f_{ij}(t)\,(x_i(t)-x_j(t))^T\int_0^1 \psi_s(x-(1-\tau)x_i(t)-\tau x_j(t))\,d\tau\Bigg) + \tilde{f}_s^{(ex)}(x,t)$$

$$\underset{(45)}{=} -\mathrm{div}\big(\varrho_s(x,t)\,v_s(x,t)\,v_s^T(x,t)\big) + \tilde{f}_s^{(ex)}(x,t)$$

$$+\mathrm{div}\Bigg(-\sum_{i=1}^N \frac{(p_i(t)-m_i v_s(x,t))(p_i(t)-m_i v_s(x,t))^T}{m_i}\,\psi_s(x-x_i(t)) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^N f_{ij}(t)\,(x_i(t)-x_j(t))^T\int_0^1 \psi_s(x-(1-\tau)x_i(t)-\tau x_j(t))\,d\tau\Bigg)$$

$$\underset{\substack{(43)\\(33)}}{=} -\mathrm{div}\big(\varrho_s(x,t)\,v_s(x,t)\,v_s^T(x,t)\big) + \mathrm{div}\big(\sigma_s(x,t)\big) + \varrho_s(x,t)\,f_s^{(ex)}(x,t) \quad \blacksquare$$

Definition 2.8: (Matrixdivergenz)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^{d,d}$ einmal stetig-differenzierbar und $d \in \mathbb{N}$.

$$(46) \qquad \operatorname{div}(\sigma(x)) := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{\cdot j}(x), \quad x \in \Omega, \quad \text{(Spaltenvektor!)}$$

bzw. komponentenweise

$$(47) \qquad \big(\operatorname{div}(\sigma(x))\big)_i := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(x), \quad x \in \Omega. \quad \text{(d.h. die Divergenz wird zeilenweise angewendet)}$$

Bemerkung 2.9: (Hydrodynamischer Grenzübergang)

Um aus (30) (bzw. (31)) und (36) (bzw. (37)) die entsprechenden Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik zu gewinnen, muss der hydrodynamische Grenzübergang durchgeführt werden. Da dies sehr aufwändig ist, werden wir diesen nicht vorführen. Die Idee hierbei ist es die Anzahl N der Massenpunkte gegen unendlich konvergieren zu lassen. Gleichzeitig lässt man s gegen 0 konvergieren, was zur Folge hat, dass Ψ_s gegen die Delta-Distribution konvergiert. Dieser Grenzübergang $N \to \infty$ und $s \to 0$ muss zudem in einem bestimmten Verhältnis erfolgen.

2.4. Kinematik:

In der Kontinuumsmechanik sind alle relevanten Größen auf einem Kontinuum definiert, d.h. auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ (d.h. Ω ist offen und zusammenhängend). Dieses Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ wird in der Regel zeitlich variieren, so dass wir $\Omega(t)$ statt Ω schreiben. Mit Kinematik bezeichnet man die Beschreibung solcher zeitlich veränderlicher Körper oder Gebiete, ohne Berücksichtigung der (Trieb-) Kräfte, die diese Veränderung hervorrufen.

2.4.1. Lagrange- und Euler-Koordinaten:

Es bezeichne:

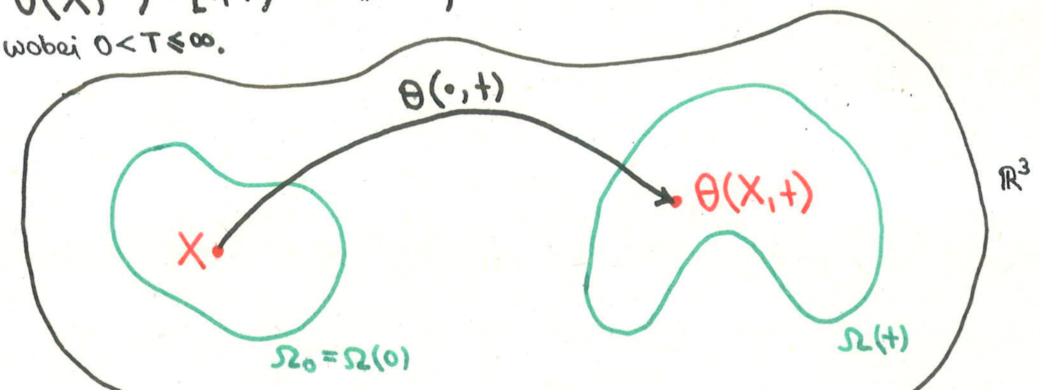
$\Omega_0 := \Omega(0) \subset \mathbb{R}^3$: Referenzkonfiguration ($\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ sei ein Gebiet)

$X \in \Omega_0$: Materiepunkt (oder: materieller Punkt, Teilchen, Partikel)

Der zeitliche Verlauf der Position eines Materiepunktes $X \in \Omega_0$ wir durch eine Abbildung

$$(48) \qquad \theta(X,\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^3, \quad t \longmapsto \theta(X,t)$$

beschrieben, wobei $0 < T \leq \infty$.



Definiere:

$$(49) \qquad \Omega(t) := \{\theta(X,t) \in \mathbb{R}^3 \mid X \in \Omega_0\} = \theta(\Omega_0,t) \subset \mathbb{R}^3, \quad t \in [0,T]$$

$$(50) \qquad \tilde{\Omega} := \{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mid x \in \Omega(t), t \in [0,T]\} = \{(\theta(X,t),t) \mid X \in \Omega_0, t \in [0,T]\}$$

Annahmen:

(A1): $\theta(X,0) = X \quad \forall X \in \Omega_0$

(A2): $\theta : \Omega_0 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$, $(X,t) \longmapsto \theta(X,t)$ ist 1x stetig differenzierbar

(A3): $\theta(\cdot,t) : \Omega_0 \to \Omega(t)$, $X \longmapsto \theta(X,t)$ ist bijektiv $\quad \forall t \geq 0$

(A4): $\det \frac{\partial \theta}{\partial X}(X,t) > 0 \quad \forall t \geq 0 \ \forall X \in \Omega_0$

Beachte: Wir bezeichnen die Umkehrabbildung von $\theta(\cdot,t)$ mit $\theta^{-1}(\cdot,t)$ für jedes feste $t \geq 0$.

Bemerke:

(51) $\bullet\ \theta(X,t) =: x \overset{(A3)}{\Longleftrightarrow} \theta^{-1}(x,t) = X$

(52) $\bullet\ \det \frac{\partial \theta}{\partial X}(X,t) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial \theta_1}{\partial X_3} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial \theta_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}(X,t)}_{\text{Jacobi-Matrix}}$ Jacobi-Determinante (oder: Funktionaldeterminante)

Die Bezeichnungen x und X beziehen sich auf zwei verschiedene Typen von Koordinaten:

- Lagrange- (oder: materielle) Koordinaten X: Ein fester Materiepunkt wird betrachtet und seine Bewegung in der Zeit verfolgt.
- Euler-Koordinaten x: Es wird ein fester Punkt im Raum betrachtet. Dabei wird verfolgt, welche Materiepunkte sich zu welchen Zeitpunkten t an dieser Stelle befinden.

Wir bezeichnen die Beschreibung einer Variablen in

- Lagrange-Koordinaten durch $\phi(X,t)$ (z.B. Elastizitätstheorie, Statik)
- Euler-Koordinaten durch $\varphi(x,t)$ (z.B. Strömungsmechanik, Wärmeleitung)

Anders ausgedrückt:

- $\phi(X,t)$ ist die Position des Materiepunktes zur Zeit t, der in der Referenzkonfiguration Ω_0 an der Stelle X war.
- $\varphi(x,t)$ beschreibt den Materiepunkt aus der Referenzkonfiguration, der zur Zeit t an der Stelle x ist.

Ist die Observable $\varphi: \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto \varphi(x,t)$ gegeben, so definieren wir

(53) $$\varphi(\theta(X,t),t) =: \phi(X,t) \quad , \quad X \in \Omega_0,\ t \in [0,T)$$

Ist umgekehrt $\phi: \Omega_0 \times [0,T) \to \mathbb{R}$, $(X,t) \mapsto \phi(X,t)$ gegeben, so definieren wir

(54) $$\phi(\theta^{-1}(x,t),t) =: \varphi(x,t) \quad , \quad (x,t) \in \tilde{\Omega}.$$

Wegen (A3) sind diese Definitionen äquivalent. Aus der Kettenregel erhalten wir

(55) $$\frac{\partial \phi}{\partial t}(X,t) \underset{(53)}{=} \frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi(\theta(X,t),t)\right] \underset{(KR)}{=} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\theta(X,t),t)\underbrace{\frac{\partial \theta}{\partial t}(X,t)}_{\overset{(57)}{=:} V(X,t) \overset{(58)}{=} v(\theta(X,t),t)} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\theta(X,t),t)$$

(56) $$\overset{x:=\theta(X,t)}{\underset{(51)}{\Longrightarrow}} \frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi(x,t)\right] \underset{\substack{(51)\\(55)}}{=} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\, v(x,t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) = \nabla\varphi(x,t) \cdot v(x,t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)$$

wobei

(57) $$V(X,t) := \frac{\partial \theta}{\partial t}(X,t)$$: Geschwindigkeit von X in Lagrange-Koordinaten

(58) $$v(x,t) := V(\theta^{-1}(x,t),t)$$: Geschwindigkeit von x in Euler-Koordinaten

Definition 2.10: (materielle Ableitung)

Der Ausdruck (vgl. (56))

(59) $$D_t \varphi(x,t) := \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) + \nabla\varphi(x,t) \cdot v(x,t)$$

heißt materielle Ableitung von φ nach t.

Bemerkung 2.11: (Bahnlinien und Stromlinien)

Beachte: $\theta(X,\cdot)$ aus (48) löst die Anfangswertaufgabe $\frac{\partial}{\partial t}\theta(X,t) = v(\theta(X,t),t)$, $\theta(X,0) = X$

(1): Bahnlinien sind die Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(t) = v(y(t),t)$$

$\{y(t) \mid t \geq 0\}$ gibt die Kurve an, die ein Materiepunkt im Verlauf der Bewegung durchläuft.

(2): Stromlinien sind die Lösungen der Differentialgleichung

$$z'(s) = v(z(s),t)$$

$\{z(s) \mid s \geq 0\}$ beschreibt eine „Momentaufnahme" des Geschwindigkeitfeldes zur Zeit t.

2.4.2. Eulersche Entwicklungsformel:

Wir untersuchen nun die Verformung eines Gebietes $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Es bezeichne:

$\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$: Referenzkonfiguration

(60) $$\Omega(t) := \{\theta(X,t) \in \mathbb{R}^3 \mid X \in \Omega_0\} = \theta(\Omega_0, t) \subset \mathbb{R}^3$$

(61) $$J(X,t) := \det \frac{\partial \theta}{\partial X}(X,t) \quad : \text{Jacobi-Determinante}$$

(62) $$|\Omega(t)| := \int_{\Omega(t)} 1\, dx \underset{\uparrow}{=} \int_{\Omega_0} 1 \cdot \left|\det \frac{\partial \theta}{\partial X}(X,t)\right| dX \underset{(A4)}{=} \int_{\Omega_0} J(X,t)\, dX \quad : \text{Volumen von } \Omega(t)$$

Transformationssatz
mit Transformation $\theta(\cdot,t) : \Omega_0 \to \Omega(t)$
(da $\theta(\cdot,t)$ Diffeomorphismus, d.h. $\theta(\cdot,t)$ $\underset{(A3)}{\text{bijektiv}}$ & $\underset{(A2)}{\text{stetig}}$ und $\theta^{-1}(\cdot,t)$ stetig)

Satz 2.12: (Eulersche Entwicklungsformel)

$\theta : \Omega_0 \times [0,T) \to \mathbb{R}^3$ erfülle (A1)–(A4). Zusätzlich sei $\frac{\partial \theta}{\partial t} : \Omega_0 \times [0,T) \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, dann gilt:

(63) $$\frac{\partial J}{\partial t}(X,t) = \Big[\nabla \cdot v(x,t)\Big]_{x=\theta(X,t)} J(X,t) = [\operatorname{div}_x v](\theta(X,t),t)\, J(X,t) \quad \forall (X,t) \in \Omega_0 \times [0,T)$$

Für den Beweis benötigen wir das folgende Resultat.

Lemma 2.13: (Ableitung der Determinante)

Sei $A : [0,T) \to \mathbb{R}^{3,3}$, $t \mapsto A(t)$ stetig differenzierbar und $A(t)$ invertierbar für alle $t \geq 0$, dann gilt:

(64) $$\frac{d}{dt}\Big[\det A(t)\Big] = \operatorname{spur}\left(A^{-1}(t) \frac{d}{dt} A(t)\right) \det A(t). \qquad (\text{Jacobi-Formel})$$

Beweis: (Satz 2.12)

Für $X \in \Omega_0$ sei
$$A(t) := \frac{\partial \theta}{\partial X}(X,t), \quad t \geq 0,$$
dann gilt

- $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ stetig diffbar in $\Omega_0 \times [0,T)$ $\Rightarrow$ A stetig diffbar in $[0,T)$ $\forall X \in \Omega_0$
- (A4) $\Rightarrow$ $\det A(t) = \det D_X \theta(X,t) \overset{\neq 0}{>} 0$ $\forall X \in \Omega_0\ \forall t \geq 0$ $\Rightarrow$ $A(t)$ invertierbar $\forall X \in \Omega_0\ \forall t \geq 0$

und somit ist Lemma 2.13 anwendbar. Es folgt nun

$$\frac{\partial J}{\partial t}(X,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big[\det D_X \theta(X,t)\Big] = \frac{d}{dt}\Big[\det A(t)\Big]$$

$$\underset{\text{Lemma 2.13}}{=} \operatorname{spur}\left(A^{-1}(t) \frac{d}{dt} A(t)\right) \det A(t)$$

$$= \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(A^{-1}(t)\right)_{ij} \cdot \left(\frac{d}{dt} A(t)\right)_{ji}\right] \det A(t)$$

$$= \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(A^{-1}(t)\right)_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_k}(\theta(X,t),t)\,(A(t))_{ki}\right] \det A(t)$$

$$\underset{\substack{\text{Summen}\\\text{vertauschen}}}{=} \left[\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_k}(\theta(X,t),t) \underbrace{\sum_{i=1}^3 (A(t))_{ki} \left(A^{-1}(t)\right)_{ij}}_{= (A(t)A^{-1}(t))_{kj} = (I_3)_{kj} = \delta_{kj} := \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases}}\right] \det A(t)$$

$$= \left[\sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j}(\theta(X,t),t)\right] \det A(t) = \underbrace{\Big[\operatorname{div} v(x,t)\Big]_{x=\theta(X,t)}}_{= [\nabla \cdot v(x,t)]_{x=\theta(X,t)}} J(X,t),$$

denn zum einen gilt

$$C = AB \ , \ A, B, C \in \mathbb{R}^{3,3}$$

$$\Rightarrow C_{ik} = (AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} B_{jk}$$

$$\Rightarrow \operatorname{spur}(C) := \sum_{i=1}^{3} C_{ii} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} A_{ij} B_{ji}$$

und zum anderen

$$\frac{d}{dt} A(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \theta}{\partial X}(X,t)\right) = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}(X,t)\right) = \frac{\partial}{\partial X} V(X,t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial X}\Big[v(\theta(X,t),t)\Big] = \frac{\partial v}{\partial x}(\theta(X,t),t)\,\frac{\partial \theta}{\partial X}(X,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(\theta(X,t),t)\, A(t)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt} A(t)\right)_{ji} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}(\theta(X,t),t)\,(A(t))_{ki} \ .$$

■

<u>Beweis:</u> (Lemma 2.13)

Folgerung 2.14: (Volumenänderung des Kontinuums)

Für das Volumen (vgl. (62))

$$|\Omega(t)| := \int_{\Omega(t)} 1\, dx \underset{(62)}{=} \int_{\Omega_0} J(X,t)\, dX \quad , \quad t \geq 0,$$

gilt

(65) $$\frac{d}{dt}|\Omega(t)| = \int_{\Omega(t)} \operatorname{div} v(x,t)\, dx \quad , \quad t \geq 0.$$

Beweis: (Folgerung 2.14)

$$\frac{d}{dt}|\Omega(t)| \underset{\substack{(62)\\ \text{(inkl. Transformationssatz)}}}{=} \int_{\Omega_0} \frac{\partial J}{\partial t}(X,t)\, dX \underset{\text{Satz 2.12}}{=} \int_{\Omega_0} \left[\nabla \cdot v(x,t)\right]_{x=\theta(X,t)} J(X,t)\, dX$$

$$\underset{\text{Transformationssatz}}{=} \int_{\Omega(t)} \nabla \cdot v(x,t)\, dx \underset{\substack{\text{Definition}\\ \text{der Divergenz}}}{=} \int_{\Omega(t)} \operatorname{div} v(x,t)\, dx. \quad \blacksquare$$

2.4.3. Reynoldssches Transporttheorem:

Wir formulieren nun das Reynoldssche Transporttheorem. Dies bildet die mathematische Grundlage aus der alle Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik hergeleitet werden können.

Satz 2.15: (Reynoldssches Transporttheorem)

$\theta : \Omega_0 \times [0,T) \to \mathbb{R}^3$ erfülle (A1)-(A4). Zusätzlich seien $\frac{\partial \theta}{\partial t} : \Omega_0 \times [0,T) \to \mathbb{R}^3$ und $\varphi : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt

(66) $$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \varphi(x,t)\, dx = \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) + \operatorname{div}\left(\varphi(x,t)\, v(x,t)\right)\right] dx \quad , \quad t \in [0,T).$$

Beweis: (Satz 2.15)

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \varphi(x,t)\, dx \underset{\substack{\text{Transformationssatz}\\ \text{mit Transformation aus (62)}}}{=} \frac{d}{dt}\int_{\Omega_0} \varphi(\theta(X,t),t)\, \underbrace{\left|\det \frac{\partial \theta}{\partial X}(X,t)\right|}_{\underset{(61)}{=} |J(X,t)| \underset{(A4)}{=} J(X,t)} dX$$

$$\underset{\substack{(PR)\\(KR)}}{=} \int_{\Omega_0} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\theta(X,t),t)\underbrace{\frac{\partial \theta}{\partial t}(X,t)}_{\underset{(57)}{=} V(X,t) \underset{(58)}{=} v(\theta(X,t),t)} J(X,t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\theta(X,t),t) J(X,t) + \varphi(\theta(X,t),t)\underbrace{\frac{\partial J}{\partial t}(X,t)}_{\underset{\text{Satz 2.12}}{=} [\nabla \cdot v(x,t)]_{x=\theta(X,t)} J(X,t) = \operatorname{div}_x v(\theta(X,t),t)\, J(X,t)}\right] dX$$

$$\underset{\text{Satz 2.12}}{=} \int_{\Omega_0} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\theta(X,t),t) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\theta(X,t),t)\, v(\theta(X,t),t) + \varphi(\theta(X,t),t)\operatorname{div}_x v(\theta(X,t),t)\right] J(X,t)\, dX$$

$$\underset{\substack{\text{Transformationssatz mit}\\ \text{Transformation aus (62)}}}{=} \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\, v(x,t) + \varphi(x,t)\operatorname{div} v(x,t)}_{\underset{\text{Produktregel für die Divergenz}}{=} \operatorname{div}(\varphi(x,t)\, v(x,t))}\right] dx$$

$$= \int_{\Omega(t)} \left[\underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)}_{\substack{\text{Einfluss der Änderung}\\ \text{der Größe } \varphi(x,t)}} + \underbrace{\operatorname{div}(\varphi(x,t)\, v(x,t))}_{\substack{\text{Änderung durch die}\\ \text{Verformung des Randes } \partial\Omega(t) \text{ von } \Omega(t)}}\right] dx. \quad \blacksquare$$

Folgerung 2.16:
Seien die Voraussetzungen von Satz 2.15 erfüllt, dann gilt

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \varphi(x,t)\,dx = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dx + \int_{\partial\Omega(t)} \varphi(x,t)v(x,t)\cdot n(x,t)\,ds_x \ , \quad t\in[0,T). \tag{67}$$

Dies folgt direkt aus Satz 2.15 und dem Gaußschen Integralsatz (Divergenzsatz)

$$\int_{\Omega(t)} \operatorname{div}(\varphi(x,t)v(x,t))\,dx = \int_{\partial\Omega(t)} \varphi(x,t)v(x,t)\cdot n(x,t)\,ds_x .$$

2.5. Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik:

Die Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik basieren auf Erhaltungsprinzipien für Masse, Impuls, Drehimpuls und Energie. Wir formulieren die entsprechenden Erhaltungssätze in Euler-Koordinaten.

Motivation: Es bezeichne

$\Omega(t) := \{\theta(X,t)\in\mathbb{R}^3 \mid X\in\Omega_0\} = \theta(\Omega_0,t)$: zeitlich veränderliches materielles Volumen

$\tilde\Omega := \{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R} \mid t\in[0,T),\ x\in\Omega(t)\}$

$\varphi : \tilde\Omega \to \mathbb{R}$: Dichte einer physikalischen Größe (in Euler-Koordinaten)

$v : \tilde\Omega \to \mathbb{R}^3$: Geschwindigkeitsfeld (in Euler-Koordinaten)

$\psi : \tilde\Omega\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: zur physikalischen Größe gehöriger physikalischer Fluss

$r : \tilde\Omega \to \mathbb{R}$: Reaktionsrate

Das Hauptpostulat der Kontinuumsmechanik ist die Erhaltungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \varphi(x,t)\,dx + \int_{\partial\Omega(t)} \psi(x,t,n(x,t))\,do = \int_{\Omega(t)} r(x,t)\,dx \ , \quad t\in[0,T) \tag{68}$$

Aus dem Reynoldschen Transporttheorem 2.15, dem Satz von Cauchy (Existenz des Flussvektors) und dem Gaußschen Integralsatz (Divergenzsatz) folgt

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \varphi(x,t)\,dx \underset{\uparrow\ \text{Reynolds}}{=} \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t) + \operatorname{div}(\varphi(x,t)v(x,t))\right]dx \ , \quad t\in[0,T) \tag{69}$$

und

$$\int_{\partial\Omega(t)} \psi(x,t,n(x,t))\,do \underset{\uparrow\ \text{Cauchy}}{=} \int_{\partial\Omega(t)} \tilde\psi(x,t)\cdot n(x,t)\,do \underset{\uparrow\ \text{Gauß}}{=} \int_{\Omega(t)} \operatorname{div}(\tilde\psi(x,t))\,dx \ , \quad t\in[0,T). \tag{70}$$

Einsetzen von (69) und (70) in (68) liefert

$$\int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t) + \operatorname{div}(\varphi(x,t)v(x,t)) + \operatorname{div}(\tilde\psi(x,t)) - r(x,t)\right]dx = 0 \ , \quad t\in[0,T). \tag{71}$$

(71) muss für jedes geeignete Volumen (Gaußgebiet) $\Omega(t)\subset\mathbb{R}^3$ erfüllt sein, insbesondere für jedes Teilvolumen (Gaußgebiet) $U\subseteq\Omega(t)$ eines gegebenen Volumens $\Omega(t)$. Ist der Integrand in (71) stetig (z.B. wenn $\varphi, v, \tilde\psi\in C^1$, $f\in C$), so gilt die differenzielle Form der Erhaltungsgleichung (71)

$$\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)}_{\substack{\text{zeitliche Änderung}\\ \text{der Größe } \varphi}} + \underbrace{\operatorname{div}(\varphi(x,t)v(x,t))}_{\substack{\text{Einfluss durch}\\ \text{die Verformung}\\ \text{des Gebietes } \Omega(t)}} + \underbrace{\operatorname{div}(\tilde\psi(x,t))}_{\substack{\text{Einfluss durch}\\ \text{den Fluss auf}\\ \text{dem Rand}}} - \underbrace{r(x,t)}_{\substack{\text{Einfluss durch}\\ \text{Veränderungen}\\ \text{innerhalb des Gebietes}}} = 0 \ , \quad t\in[0,T),\ x\in\Omega(t) \tag{72}$$

Beachte: (68) besagt:

zeitliche Veränderung einer gegebenen physikalischen Größe in einem Gebiet + die über den Rand des Gebietes zu- bzw. abgeführten Anteile = die in einem Gebiet erzeugten oder vernichteten Anteile der physikalischen Größe

2.5.1. Massenerhaltung und Kontinuitätsgleichung:

Es bezeichne:

$$\varrho : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R} : \text{Massendichte}$$
$$v : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^3 : \text{Geschwindigkeitsfeld}$$
$$m(t) := \int_{\Omega(t)} \varrho(x,t)\,dx : \text{Masse zur Zeit } t \text{ in } \Omega(t)$$

Die Menge $\Omega(t)$ enthalte für alle Zeiten $t \in [0,T)$ dieselben Massenpunkte. Die kontinuumsmechanische Formulierung der Massenerhaltung (24), also $\frac{d}{dt}m(t) = 0$, lautet

Massenerhaltung:

(73) $$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \varrho(x,t)\,dx = 0 \quad , \quad t \in [0,T).$$

Aus (73) und (66) (Reynoldssches Transporttheorem, Satz 2.15 mit $\varphi := \varrho$) folgt

(74) $$0 \underset{(73)}{=} \frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \varrho(x,t)\,dx \underset{(66)}{=} \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial \varrho}{\partial t}(x,t) + \operatorname{div}(\varrho(x,t)\,v(x,t))\right] dx \quad , \quad t \in [0,T).$$

(74) muss (für jeden Zeitpunkt $t \in [0,T)$) für jedes Teilvolumen $U \subseteq \Omega(t)$ erfüllt sein. Ist der Integrand in (74) zusätzlich stetig (z.B. wenn $\varrho, v \in C^1$), so gilt die

Kontinuitätsgleichung:

(75) $$\frac{\partial \varrho}{\partial t}(x,t) + \operatorname{div}(\varrho(x,t)\,v(x,t)) = 0 \quad , \quad t \in [0,T),\ x \in \Omega(t).$$

Interpretation der Kontinuitätsgleichung: Nach (73) und (67) gilt

(76) $$0 = \underbrace{\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \varrho(x,t)\,dx}_{\text{zeitliche Änderung der Masse } m(t) \text{ im Gebiet } \Omega(t)} = \underbrace{\int_{\Omega(t)} \frac{\partial \varrho}{\partial t}(x,t)\,dx}_{\text{zeitliche Änderung der Massendichte im Gebiet } \Omega(t)} + \underbrace{\int_{\partial\Omega(t)} \varrho(x,t)\,v(x,t)\cdot n(x,t)\,do}_{\text{die über den Rand des Gebiets } \Omega(t) \text{ zu- oder abgeführte Masse}}$$

2.5.2. Impulserhaltung:

Es bezeichne:

$$\varrho f : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^3 : \text{Volumenkraftdichte} \qquad (f : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^3 : \text{externes Feld})$$
$$b : \partial\tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^3 : \text{Oberflächenkraftdichte}$$
$$\varrho v : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^3 : \text{Impulsdichte}$$
$$p(t) := \int_{\Omega(t)} \varrho(x,t)\,v(x,t)\,dx : \text{Impuls}$$
$$f(t) := \underbrace{\int_{\Omega(t)} \varrho(x,t)\,f(x,t)\,dx}_{\text{Volumenkraft}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega(t)} b(x,t)\,do}_{\text{Oberflächenkraft}} : \text{Gesamtkraft}$$

Die kontinuumsmechanische Formulierung der Impulserhaltung (12), also $\frac{d}{dt}p(t) = f(t)$, lautet

(77) $$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \varrho(x,t)\,v(x,t)\,dx}_{\text{zeitliche Änderung des Impulses } p(t) \text{ im Gebiet } \Omega(t)} = \underbrace{\underbrace{\int_{\Omega(t)} \varrho(x,t)\,f(x,t)\,dx}_{\text{Kraft, die auf das Volumen } \Omega(t) \text{ wirkt}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega(t)} b(x,t)\,do}_{\text{Kraft, die auf die Oberfläche } \partial\Omega(t) \text{ wirkt}}}_{\text{Gesamtkraft, die auf das Gebiet } \Omega(t) \text{ wirkt}}$$

Aus (77) und (66) (Reynoldssches Transporttheorem, Satz 2.15 mit $\varphi := \rho v_j$, $j=1,2,3$) folgt für jede Komponente $j=1,2,3$

$$(78)\qquad \int\limits_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t}\Big(\rho(x,t)v_j(x,t)\Big) + \operatorname{div}\Big(\rho(x,t)v_j(x,t)v(x,t)\Big)\right]dx = \int\limits_{\Omega(t)} \rho(x,t)f_j(x,t)\,dx + \int\limits_{\partial\Omega(t)} b_j(x,t)\,do$$

Mithilfe der Matrixdivergenz (46) lässt sich (78) auch kompakt schreiben als

$$(79)\qquad \int\limits_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t}\Big(\rho(x,t)v(x,t)\Big) + \operatorname{div}\Big(\rho(x,t)v(x,t)v(x,t)^T\Big)\right]dx = \int\limits_{\Omega(t)} \rho(x,t)f(x,t)\,dx + \int\limits_{\partial\Omega(t)} b(x,t)\,do$$

Aus dem Satz von Cauchy (Existenzsatz des Spannungtensors), dem Gaußschen Integralsatz (Divergenzsatz) und der Matrixdivergenz (46) erhalten wir

$$(80)\qquad \int\limits_{\partial\Omega(t)} b(x,t)\,do \underset{\text{Cauchy}}{=} \int\limits_{\partial\Omega(t)} \sigma(x,t)\,n(x,t)\,dx \underset{\substack{\text{Gauß}\\ \&(46)}}{=} \int\limits_{\Omega(t)} \operatorname{div}\sigma(x,t)\,dx$$

wobei $\sigma : \tilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^{3,3}$ den Spannungstensor bezeichnet. Einsetzen von (80) in (79) liefert

$$(81)\qquad \int\limits_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t}\Big(\rho(x,t)v(x,t)\Big) + \operatorname{div}\Big(\rho(x,t)v(x,t)v(x,t)^T\Big) - \rho(x,t)f(x,t) - \operatorname{div}\sigma(x,t)\right]dx = 0$$

Nach der Kettenregel, der Produktregel für die Divergenz und der Kontinuitätsgleichung (75) gilt

$$\nabla v_j \cdot \rho v = \rho v \cdot \nabla v_j = \rho(v\cdot\nabla)v_j$$

$$(82)\qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j) + \operatorname{div}(\rho v_j v) \underset{\substack{(KR)\\(PR)}}{=} v_j\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial v_j}{\partial t} + \nabla v_j \cdot \rho v + v_j \operatorname{div}(\rho v) = \rho\frac{\partial v_j}{\partial t} + \rho(v\cdot\nabla)v_j$$

$$v_j\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \operatorname{div}(\rho v) \overset{(75)}{=} 0$$

Mit der Matrixdivergenz (46) und dem Differentialoperator $v\cdot\nabla := \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ lässt sich (82) schreiben als

$$(83)\qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v v^T) = \rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho(v\cdot\nabla)v$$

Einsetzen von (83) in (81) liefert

$$(84)\qquad \int\limits_{\Omega(t)} \left[\rho(x,t)\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) + \rho(x,t)\Big(v(x,t)\cdot\nabla\Big)v(x,t) - \rho(x,t)f(x,t) - \operatorname{div}\sigma(x,t)\right]dx = 0$$

(84) muss (für jeden Zeitpunkt $t\in[0,T)$) für jedes Teilvolumen $U \subseteq \Omega(t)$ erfüllt sein. Ist der Integrand in (84) zusätzlich stetig (z.B. wenn $\rho, v, \sigma \in C^1$, $f\in C$), so gilt die

Impulserhaltungsgleichung:

$$(85)\qquad \boxed{\rho(x,t)\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) + \rho(x,t)\Big(v(x,t)\cdot\nabla\Big)v(x,t) - \operatorname{div}\sigma(x) = \rho(x,t)f(x,t),\quad t\in[0,T),\ x\in\Omega(t)}$$

(85) ist die nicht-konservative Form der Impulserhaltung. Forder wir, dass (statt (84)) Gleichung (81) (für jeden Zeitpunkt $t\in[0,T)$) für jedes Teilvolumen $U\subseteq\Omega(t)$ erfüllt ist und der Integrand in (85) stetig ist, so erhalten wir die konservative Form der Impulserhaltung

$$(86)\qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\Big(\rho(x,t)v(x,t)\Big) + \operatorname{div}\Big(\rho(x,t)v(x,t)v(x,t)^T\Big) - \operatorname{div}\sigma(x,t) = \rho(x,t)f(x,t),\quad t\in[0,T),\ x\in\Omega(t)}$$

2.5.3. Drehimpulserhaltung:

Es bezeichne:

$$L(t) := \int_{\Omega(t)} (x - x_0) \times (\varrho(x,t) v(x,t))\, dx \quad : \text{ Drehimpuls}$$

$$M(t) := \underbrace{\int_{\Omega(t)} (x - x_0) \times (\varrho(x,t) f(x,t))\, dx}_{\text{von den Volumenkräften erzeugte Drehmomente}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega(t)} (x - x_0) \times (\sigma(x,t) n(x,t))\, do}_{\text{von den Oberflächenkräften erzeugte Drehmomente}} : \text{ Drehmoment}$$

Die Kontinuumsmechanische Formulierung der Drehimpulserhaltung (18), also $\frac{d}{dt} L(t) = M(t)$, lautet

(87) $$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} (x-x_0) \times (\varrho(x,t) v(x,t))\, dx}_{\text{zeitliche Änderung des Drehimpulses in } \Omega(t)} = \underbrace{\int_{\Omega(t)} (x-x_0) \times (\varrho(x,t) f(x,t))\, dx + \int_{\partial\Omega(t)} (x-x_0) \times (\sigma(x,t) n(x,t))\, do}_{\text{von der Gesamtkraft, die auf das Gebiet } \Omega(t) \text{ wirkt, erzeugte Drehmomente}}$$

Aus (87) und (66) (Reynoldssches Transporttheorem, Satz 2.15 mit $\varphi = ((x-x_0) \times (\varrho v))_j$, $j = 1,2,3$) folgt für jede Komponente $j = 1,2,3$ (wir unterdrücken die Argumente (x,t))

(88) $$\int_{\Omega(t)} \Big[\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \big((x-x_0) \times (\varrho v) \big)_j}_{= \left((x-x_0) \times \frac{\partial}{\partial t}(\varrho v) \right)_j} + \underbrace{\operatorname{div}\big(((x-x_0) \times (\varrho v))_j v \big)}_{\text{wird jetzt umgeformt}} \Big] dx = \int_{\Omega(t)} \big((x-x_0) \times (\varrho f) \big)_j dx + \int_{\partial\Omega(t)} \big((x-x_0) \times (\sigma n) \big)_j do$$

Verwenden wir für das Vektorprodukt

$$a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}^3$$

das Levi-Civita-Symbol

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1, & (i,j,k) \text{ gerade Permutation von } (1,2,3) \\ -1, & \quad \text{"} \quad \text{ungerade} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ 0, & \quad \text{"} \quad \text{keine} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \end{cases}, \quad i,j,k \in \{1,2,3\},$$

so gilt

(89) $$(a \times b)_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k.$$

Aus der Definition der Divergenz, (89), der Linearität von $\frac{\partial}{\partial x_i}$, der Produktregel, dem Kronecker-Delta-Symbol $\delta_{ik} := \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$, der Eigenschaft $a \times a = 0 \ \forall a \in \mathbb{R}^3$ und der Definition des Differentialoperators $v \cdot \nabla$ erhalten wir

(90) $$\operatorname{div}\big(((x-x_0) \times (\varrho v))_j v \big) \underset{\substack{\text{Def.} \\ \text{der Divergenz}}}{=} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \big(((x-x_0) \times (\varrho v))_j v_i \big) \underset{\text{(89) \& Lin. von } \frac{\partial}{\partial x_i}}{=} \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big[\varepsilon_{jkl} (x-x_0)_k (\varrho v)_l v_i \Big]$$

$$\underset{\text{(PR)}}{=} \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{jkl} \underbrace{\Big[\frac{\partial}{\partial x_i} (x-x_0)_k \Big]}_{= \delta_{ik}} \varrho v_l v_i + \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{jkl} (x-x_0)_k \Big[\frac{\partial}{\partial x_i} (\varrho v_i) \Big] v_l + \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{jkl} (x-x_0)_k \varrho v_i \Big[\frac{\partial}{\partial x_i} v_l \Big]$$

$$= \varrho \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{jil} v_l v_i}_{\underset{(89)}{=} (v \times v)_j = 0} + \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{jkl} (x-x_0)_k \big(v \operatorname{div}(\varrho v) \big)_l + \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{jkl} (x-x_0)_k \big(\varrho (v \cdot \nabla) v \big)_l$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{jkl} (x-x_0)_k \big(v \operatorname{div}(\varrho v) + \varrho (v \cdot \nabla) v \big)_l \underset{(89)}{=} \Big((x-x_0) \times \big(v \operatorname{div}(\varrho v) + \varrho (v \cdot \nabla) v \big) \Big)_j$$

Außerdem gilt

(91) $$\frac{\partial}{\partial t} \big((x-x_0) \times (\varrho v) \big)_j \underset{(89)}{=} \Big((x-x_0) \times \frac{\partial}{\partial t} (\varrho v) \Big)_j$$

Einsetzen von (90) und (91) in (88) liefert für jede Komponente $j=1,2,3$

(92) $$\int_{\Omega(t)} \left((x-x_0)\times\left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + v\,\mathrm{div}(\rho v) + \rho(v\cdot\nabla)v\right)\right)_j dx = \int_{\Omega(t)} \left((x-x_0)\times(\rho f)\right)_j dx + \int_{\partial\Omega(t)} \left((x-x_0)\times(\sigma n)\right)_j do$$

Die vektorwertige Schreibweise von (92) liefert die

Drehimpulserhaltungsgleichung:

(93) $$\int_{\Omega(t)} (x-x_0)\times\left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + v\,\mathrm{div}(\rho v) + \rho(v\cdot\nabla)v\right) dx = \int_{\Omega(t)} (x-x_0)\times(\rho f)\,dx + \int_{\partial\Omega(t)} (x-x_0)\times(\sigma n)\,do, \quad t\in[0,T)$$

Beachte: In der Kontinuumsmechanik ist die Drehimpulserhaltung <u>keine</u> (den physikalischen Prozess bestimmende) Erhaltungsgleichung. Sie ist daher kein Bestandteil der Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik. Vielmehr verwendet man die Drehimpulserhaltungsgleichung (93) zum Symmetrienachweis des Spannungstensors σ. Sie gehört daher inhaltlich eher zu den Material=gesetzen (Konstitutive Gesetze).

Satz 2.18: (Symmetrie des Spannungstensors)
Seien (75), (85) und (93) erfüllt. Weiter seien ρ, v, f, b glatt. Dann gilt:

$$\sigma = \sigma^T \quad , \text{ d.h. } \sigma_{ik}(x,t) = \sigma_{ki}(x,t) \quad \forall t\in[0,T)\ \forall x\in\Omega(t)\ \forall i,k\in\{1,2,3\}$$

Beweis: (Satz 2.18)
Nach der Drehimpulserhaltungsgleichung (93) gilt für $a\in\mathbb{R}^3$

(94) $$a\cdot\int_{\Omega(t)} (x-x_0)\times\left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + v\,\mathrm{div}(\rho v) + \rho(v\cdot\nabla)v\right) dx = a\cdot\int_{\Omega(t)} (x-x_0)\times(\rho f)\,dx + a\cdot\int_{\partial\Omega(t)} (x-x_0)\times(\sigma n)\,do$$

Nach dem Gaußschen Satz (Divergenzsatz) gilt

(96) $$\int_{\partial\Omega(t)} (a\times(x-x_0))\cdot\sigma n\,do = \int_{\partial\Omega(t)} \sigma^T(a\times(x-x_0))\cdot n\,do$$

$$= \int_{\Omega(t)} \underbrace{\mathrm{div}\left(\sigma^T(a\times(x-x_0))\right)} dx = \int_{\Omega(t)} (a\times(x-x_0))\cdot\mathrm{div}\,\sigma\,dx + \int_{\Omega(t)} \sum_{j=1}^3\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a\times(x-x_0)\right)_k \sigma_{kj}\,dx$$

$$= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma^T(a\times(x-x_0))\right)_j = \sum_{j=1}^3\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\underbrace{(\sigma^T)_{jk}}_{=\sigma_{kj}}(a\times(x-x_0))_k\right)$$

$$= \sum_{j=1}^3\sum_{k=1}^3 (a\times(x-x_0))_k \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{kj} + \sum_{j=1}^3\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a\times(x-x_0)\right)_k \sigma_{kj}$$

$$= (a\times(x-x_0))\cdot\mathrm{div}\,\sigma + \sum_{j=1}^3\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a\times(x-x_0)\right)_k \sigma_{kj}$$

Aus (94) erhalten wir wegen $a\cdot(b\times c) = (a\times b)\cdot c$

(95) $$\int_{\Omega(t)} (a\times(x-x_0))\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + v\,\mathrm{div}(\rho v) + \rho(v\cdot\nabla)v - \rho f\right) dx = \int_{\partial\Omega(t)} (a\times(x-x_0))\cdot\sigma n\,do$$

Einsetzen von (96) in (95) liefert wegen der Kontinuitätsgleichung (75) und der Impulserhaltungsgleichung (85)

(97) $$\int_{\Omega(t)} \sum_{j=1}^3\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a\times(x-x_0)\right)_k \sigma_{kj}\,dx = \int_{\Omega(t)} (a\times(x-x_0))\cdot\underbrace{\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)}_{=\rho\frac{\partial}{\partial t}v + v\frac{\partial}{\partial t}\rho} + v\,\mathrm{div}(\rho v) + \rho(v\cdot\nabla)v - \mathrm{div}\,\sigma - \rho f\right)}_{=0} dx$$

$$= 0 \quad \forall a\in\mathbb{R}^3.$$

$\underbrace{v\frac{\partial}{\partial t}\rho + v\,\mathrm{div}(\rho v)}_{=0\ (75)}$, $\underbrace{\rho\frac{\partial}{\partial t}v + \rho(v\cdot\nabla)v - \mathrm{div}\,\sigma - \rho f}_{=0\ (85)}$

(97) muss (für jeden Zeitpunkt $t\in[0,T)$) für jedes Teilvolumen $U\subseteq\Omega(t)$ erfüllt sein. Da der Integrand stetig ist (denn: $\sigma\in C$), gilt

(98) $$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\big(a\times(x-x_0)\big)_k\,\sigma_{kj} = 0 \qquad \forall a\in\mathbb{R}^3\ \forall t\in[0,T)\ \forall x\in\Omega(t)$$

$\boxed{1}$: Für $a=e_1$ gilt

$$0=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\big(e_1\times(x-x_0)\big)}_{=\begin{pmatrix}0\\-(x-x_0)_3\\(x-x_0)_2\end{pmatrix}}{}_k\,\sigma_{kj} = -\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}(x-x_0)_3}_{=0}\sigma_{21}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}(x-x_0)_2}_{=0}\sigma_{31}-\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}(x-x_0)_3}_{=0}\sigma_{22}$$
$$+\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}(x-x_0)_2}_{=1}\sigma_{32}-\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_3}(x-x_0)_3}_{=1}\sigma_{23}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_3}(x-x_0)_2}_{=0}\sigma_{33}$$
$$=\sigma_{32}-\sigma_{23},$$

also $\sigma_{23}=\sigma_{32}$.

$\boxed{2}$: Für $a=e_2$ gilt analog $\sigma_{13}=\sigma_{31}$.

$\boxed{3}$: Für $a=e_3$ gilt analog $\sigma_{12}=\sigma_{21}$.

Aus $\boxed{1}$ - $\boxed{3}$ folgt insgesamt $\sigma=\sigma^T$. ∎

Beachte: In den Voraussetzungen von Satz 2.17 lassen sich (75) und (85) durch (81) ersetzen. Der Beweis verläuft in diesem Fall ähnlich.

2.5.4. Energieerhaltung:

Es bezeichne

innere Energiedichte

$u:\tilde{\Omega}\to\mathbb{R}$: massenbezogene Dichte der inneren Energie, spezifische innere Energie

$q:\tilde{\Omega}\to\mathbb{R}^3$: Wärmefluss, flächenbezogene Energiestromdichte Wärmestrom

$g:\tilde{\Omega}\to\mathbb{R}$: massenbezogene Dichte der Wärmequelle innere Wärmequellen

$$E_{kin}(t):=\int_{\Omega(t)}\varrho(x,t)\frac{|v(x,t)|^2}{2}\,dx$$: Kinetische Energie

$$E_{int}(t):=\int_{\Omega(t)}\varrho(x,t)\,u(x,t)\,dx$$: innere Energie

$$E(t):=\underbrace{\int_{\Omega(t)}\varrho(x,t)\frac{|v(x,t)|^2}{2}dx}_{\text{Kinetische Energie}}+\underbrace{\int_{\Omega(t)}\varrho(x,t)u(x,t)dx}_{\text{innere Energie}}=\int_{\Omega(t)}\left[\varrho(x,t)\frac{|v(x,t)|^2}{2}+\varrho(x,t)u(x,t)\right]dx$$: (mechanische) totale Energie Gesamtenergie

Leistung

$$W(t):=\underbrace{\int_{\Omega(t)}\varrho(x,t)f(x,t)\cdot v(x,t)dx}_{\text{durch Volumenkräfte zugeführte Leistung}}+\underbrace{\int_{\partial\Omega(t)}\sigma(x,t)n(x,t)\cdot v(x,t)do}_{\text{durch Oberflächenkräfte zugeführte Leistung}}-\underbrace{\int_{\partial\Omega(t)}q(x,t)n(x,t)do}_{\text{die durch den Abfluss von Wärme über den Rand verlorene Wärmeenergie}}+\underbrace{\int_{\Omega(t)}\varrho(x,t)g(x,t)dx}_{\text{durch äußere Wärmequellen zugeführte Energie}}$$:

Die Kontinuumsmechanische Formulierung der Energieerhaltung (23), d.h. $\frac{d}{dt}E(t)=W(t)$, lautet (wir unterdrücken die Argumente (x,t)):

(99) $$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)}\left[\varrho\frac{|v|^2}{2}+\varrho u\right]dx=\int_{\Omega(t)}\varrho f\cdot v\,dx+\int_{\partial\Omega(t)}\sigma n\cdot v\,do-\int_{\partial\Omega(t)}q\cdot n\,do+\int_{\Omega(t)}\varrho g\,dx\ ,\quad t\in[0,T)$$

Aus dem Reynoldsschen Transporttheorem (Satz 2.15 mit $\varphi:=\varrho\frac{|v|^2}{2}+\varrho u$) folgt

(100) $$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)}\left[\varrho\frac{|v|^2}{2}+\varrho u\right]dx\overset{(66)}{\underset{\text{Reynolds}}{=}}\int_{\Omega(t)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho\frac{|v|^2}{2}+\varrho u\right)+\operatorname{div}\left(\left(\varrho\frac{|v|^2}{2}+\varrho u\right)v\right)\right]dx\ ,\quad t\in[0,T)$$

und aus dem Gaußschen Integralsatz (Divergenzsatz mit $F:=q$ und $F:=\sigma^T v$) folgt

(101) $$\int_{\partial\Omega(t)}q\cdot n\,do\underset{\text{Gauß}}{=}\int_{\Omega(t)}\operatorname{div}q\,dx\ ,\qquad \int_{\partial\Omega(t)}\sigma n\cdot v\,do\underset{\uparrow}{=}\int_{\partial\Omega(t)}\sigma^T v\cdot n\,do\underset{\text{Gauß}}{=}\int_{\Omega(t)}\operatorname{div}(\sigma^T v)\,dx\ ,\quad t\in[0,T).$$

$Ax\cdot y=(Ax)^T y=x^T A^T y=x\cdot A^T y=A^T y\cdot x$

Einsetzen von (100) und (101) in (99) liefert

$$(102)\qquad 0 = \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{|v|^2}{2} + \rho u\right) + \operatorname{div}\left(\left(\rho\frac{|v|^2}{2} + \rho u\right)v\right) - \rho f\cdot v - \operatorname{div}(\sigma^T v) + \operatorname{div} q - \rho g\right] dx\,, \quad t\in[0,T).$$

(102) muss (für jeden Zeitpunkt $t\in[0,T)$) für jedes Teilvolumen $U\subseteq\Omega(t)$ erfüllt sein. Ist der Integrand in (102) zusätzlich stetig (z.B. wenn $\rho, v, u, \sigma, q \in C^1$, $f, g\in C$), so gilt

$$(103)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{|v|^2}{2} + \rho u\right) + \operatorname{div}\left(\left(\rho\frac{|v|^2}{2} + \rho u\right)v\right) - \rho f\cdot v - \operatorname{div}(\sigma^T v) + \operatorname{div} q - \rho g = 0\,, \quad t\in[0,T), x\in\Omega(t)$$

Aus der Produktregel, der Produktregel für die Divergenz und der Kontinuitätsgleichung (75) erhalten wir

$$(104)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{|v|^2}{2} + \rho u\right) + \operatorname{div}\left(\left(\rho\frac{|v|^2}{2} + \rho u\right)v\right) \underset{(PR)}{=} \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\left(\frac{|v|^2}{2} + u\right) + \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|v|^2}{2} + u\right) + \rho v\cdot\nabla\left(\frac{|v|^2}{2} + u\right) + \left(\frac{|v|^2}{2} + u\right)\operatorname{div}\rho v$$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\left(\frac{|v|^2}{2} + u\right) + \left(\frac{|v|^2}{2} + u\right)\operatorname{div}\rho v = \underbrace{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho v\right)}_{\underset{(75)}{=}0}\left(\frac{|v|^2}{2} + u\right) \underset{(75)}{=} 0$$

$$\underset{\substack{\text{Linearität}\\ \frac{\partial}{\partial t},\nabla}}{=} \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|v|^2}{2}\right) + \rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho v\cdot\nabla\left(\frac{|v|^2}{2}\right) + \rho v\cdot\nabla u$$

Für den 1. und 3. Summanden folgt aus der Impulserhaltung (85)

$$(105)\qquad \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|v|^2}{2}\right) + \rho v\cdot\nabla\left(\frac{|v|^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^3 \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_i^2}{2}\right) + \sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3 \rho v_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{v_j^2}{2}\right)$$

$$\underset{(PR)}{=} \sum_{i=1}^3 \rho v_i\frac{\partial}{\partial t}v_i + \rho\sum_{j=1}^3 v_j\underbrace{\sum_{i=1}^3 v_i\frac{\partial}{\partial x_i}v_j}_{=(v\cdot\nabla)v_j} = v\cdot\underbrace{\left(\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho(v\cdot\nabla)v\right)}_{\underset{(85)}{=}\rho f + \operatorname{div}\sigma}$$

$$= \rho f\cdot v + (\operatorname{div}\sigma)\cdot v$$

Einsetzen von (105) in (104) liefert

$$(106)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{|v|^2}{2} + \rho u\right) + \operatorname{div}\left(\left(\rho\frac{|v|^2}{2} + \rho u\right)v\right) = \rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho v\cdot\nabla u + \rho f\cdot v + (\operatorname{div}\sigma)\cdot v$$

Einsetzen von (106) in (103) liefert

$$(107)\qquad \rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho v\cdot\nabla u + (\operatorname{div}\sigma)\cdot v - \operatorname{div}(\sigma^T v) + \operatorname{div} q - \rho g = 0\,, \quad t\in[0,T), x\in\Omega(t).$$

Aus der Definition

$$(108)\qquad A:B := \sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d A_{ij}B_{ij} \;:\; \text{Frobenius-Skalarprodukt der Matrizen } A,B\in\mathbb{R}^{d,d}$$

und

$$\operatorname{div}\sigma(x) := \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{\cdot j}(x) \;:\; \text{Matrixdivergenz von } \sigma:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d \quad (\text{vgl. } (46))$$

erhalten wir die Produktregel für die Matrixdivergenz

$$(109)\qquad (\operatorname{div}\sigma)\cdot v - \operatorname{div}(\sigma^T v) \underset{(46)}{=} \sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3\left(v_i\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_{ij} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}v_i)}_{\underset{(PR)}{=} -v_i\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} - \sigma_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}v_i}\right) \underset{(PR)}{=} -\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3\sigma_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}v_i \underset{(108)}{=} -\sigma : Dv$$

$$=0$$

Einsetzen von (109) in (107) liefert schließlich die

Energieerhaltungsgleichung:

$$(110)\qquad \boxed{\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho v\cdot\nabla u - \sigma : Dv + \operatorname{div} q - \rho g = 0\,, \quad t\in[0,T), x\in\Omega(t)}$$

2.5.5. Zusammenfassung: Die Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik:

Es bezeichne wiederholend:

$\varrho : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$: Massendichte

$v : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^3$: Geschwindigkeitsfeld

$\sigma : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^{3,3}$: Spannungstensor

$\varrho v : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^3$: Impulsdichte

$\varrho u : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$: totale Energiedichte

$\varrho f : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^3$: Volumenkraftdichte

$u : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$: (massenbezogene) Dichte der inneren Energie (spezifische innere Energie, innere Energiedichte)

$q : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^3$: Wärmefluss ((flächenbezogene) Energiestromdichte, Wärmestrom)

$g : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$: (massenbezogene) Dichte der Wärmequelle (innere Wärmequellen)

Die Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik lauten nun in Eulerschen Koordinaten (wir unterdrücken die Argumente (x,t) und verwenden die Kurznotation $\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$):

- Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltungsgleichung):

(111) $$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0 \quad , \ t \in [0,T), \ x \in \Omega(t)$$

- Impulserhaltungsgleichung:

(112) $$\varrho \partial_t v + \varrho (v \cdot \nabla) v - \nabla \cdot \sigma = \varrho f \quad , \ t \in [0,T), \ x \in \Omega(t)$$

- Energieerhaltungsgleichung:

(113) $$\varrho \partial_t u + \varrho v \cdot \nabla u - \sigma : Dv + \nabla \cdot q = \varrho g \quad , \ t \in [0,T), \ x \in \Omega(t)$$

Die Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik (111)–(113) gelten für feste, flüssige und gasförmige Körper (aus allen möglichen Materialien).

Grundsätzlich unterscheidet man in der Kontinuumsphysik zwischen

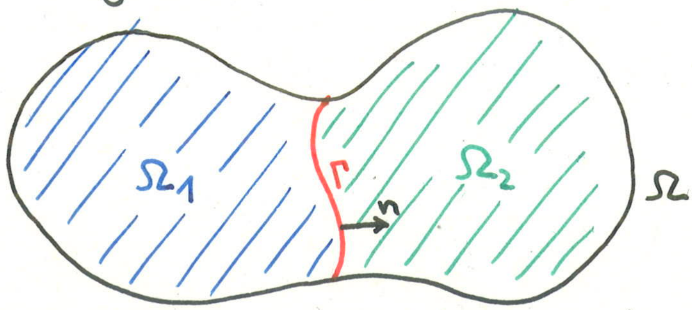
- Flüssigkeiten & Gase (engl. fluid)
  - ϱ, v, u (Unbekannte)
  - σ, f, q, g (gegeben)
- Festkörper (engl. solid)
  - ϱ, u (Unbekannte)
  - v, σ, f, q, g (gegeben)

Die gegebenen Größen werden dabei durch sogenannte Konstitutive Gesetze (Materialgesetze) festgelegt, die das Verhalten (bzw. die Eigenschaften) unterschiedlicher Materialien beschreiben und (in der Regel) durch experimentelle Messungen bestimmt werden. Einen Überblick zu den Konstitutiven Gleichungen behandeln wir in Abschnitt 2.7.

In dem obigen Zusammenhang bezeichnet man ϱ, ϱv und ϱu als Konservative Variablen (Erhaltungsvariablen).

2.6. Spannungstensor

Wir benötigen nun eine genauere Kenntniss der Übertragung von Kräften in Körpern. Dazu bezeichne $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, das in zwei Teilgebiete Ω_1, Ω_2 zerschnitten sei. Die Schnittfläche Γ sei stetig differenzierbar.



Längs dieser Schnittfläche werden Kräfte zwischen den Körpern übertragen.

Axiom (Cauchy):

Entlang Γ übt Ω_2 eine Kraft auf Ω_1 aus, die sich durch die Kraftdichte $b(x;n) \in \mathbb{R}^3$ beschreiben lässt:

$$F_{\Omega_2 \to \Omega_1} := \int_\Gamma b(x;n)\, do.$$

Dabei ist $n = n(x)$ der in Richtung Ω_2 orientierte Einheitsnormalenvektor auf Γ.

2.6.1. Existenz des Spannungstensors:

Der folgende Satz besagt, dass die Randkraftdichte b linear vom Normalenvektor n abhängt.

Satz 2.17: (Existenz des Spannungtensors)
Es gelte das Axiom von Cauchy. Weiter seien die Funktionen ϱ, v, f, b glatt. Dann gilt

$$\forall x \in \Gamma \ \exists \sigma = \sigma(x) \in \mathbb{R}^{3,3} : \ b(x;n) = \sigma(x) n.$$

Die Matrix $\sigma(x) \in \mathbb{R}^{3,3}$ heißt Spannungstensor in $x \in \Gamma$.

2.6.2. Symmetrie des Spannungstensors:

Der folgende Satz zeigt, dass die Drehimpulserhaltungsgleichung (93) die Symmetrie des Spannungtensors impliziert.

Satz 2.18: (Symmetrie des Spannungtensors)
Seien (75), (85) und (93) erfüllt. Weiter seien ϱ, v, f, b glatt. Dann gilt:

$$\sigma = \sigma^T \quad \left(\text{d.h. } \sigma_{ik}(x,t) = \sigma_{ki}(x,t) \ \ \forall t \in [0,T) \ \forall x \in \Omega(t) \ \forall i,k \in \{1,2,3\}\right)$$