2.7. Konstitutive Gesetze, Materialgesetze:

Spannungstensor σ:

① (Ideales Gas):

(114) $\sigma = -pI$ (Drucktensor) : reibungsfreie Strömung (Strömung ohne innere Reibung)

Hinweis: Kontinuitätsgleichung + Impulsbilanz ⇒ Euler-Gleichungen

② (Newton'sches Fluid)

(115) $\sigma = -pI + \mu(Dv + (Dv)^T) + \lambda(\nabla \cdot v)I$: viskose Strömung (Strömung mit innerer Reibung)

p: Druck, v: Geschwindigkeitsfeld, λ: 1. Lamé-Konstante (Volumenviskosität),
μ: 2. Lamé-Konstante (dynamische Viskosität, Scherviskosität), (λ, μ Materialparameter)

Hinweis: Kontinuitätsgleichung + Impulsbilanz ⇒ Navier-Stokes-Gleichungen

③ (Hook'sches Gesetz)

$$\sigma = G(Dv + (Dv)^T) + G\frac{2\nu}{1-2\nu}(\nabla \cdot v)I$$

G: Schubmodul, ν: Querkontraktionszahl (Poissonzahl), (G, ν Materialparameter),
v: Geschwindigkeitsfeld

Hinweis: Impulsbilanz ⇒ Navier-Cauchy-Gleichungen

In der klassischen Materialtheorie gibt es sechs Materialmodelle (ideales Gas, Newton'sches Fluid, Hook'sches Gesetz, Viskoelastizität, Plastizität und Viskoplastizität). Die Spannungstensoren für die letzten 3 Materialmodelle werden nicht behandeln.

Wärmestromdichte (Wärmefluss) q:

① (Fourier'sches Gesetz): Die Wärme fließt von Bereichen höherer Temp. zu Bereichen niedrigerer Temp. (d.h. die Wärmestromdichte q ist proportional zum Temperaturgradienten ∇T)

(116) $q = -\Lambda \nabla T$ ← zeigt in die Richtung des stärksten Temperaturabfalls

Λ: Wärmeleitfähigkeit ($\Lambda = \Lambda(x, t, T, \nabla T, \rho, c)$), isotrope Materialien : $\Lambda = \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$; anisotrope Materialien: $\Lambda \in \mathbb{R}^{3,3}$, Λ Materialparameter)

z.B. Faserverbundstoffe — Wärmedurchlässigkeit hängt von der Richtung ab

T: Temperatur, q: Wärmestromdichte

Hinweis: Energieerhaltungsgleichung ⇒ Wärmeleitungsgleichung

Dichte der inneren Energie u:

① (Ideales Gas) $\frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}$, c_p: spez. Wärmekapazität (bei konst. Druck)

(117) $u = c_v T$ (thermodynamische Zustandsgleichung)

c_v: spezifische Wärmekapazität (bei konstantem Volumen) ($c_v = c_v(x, t, T)$, c_v Materialparameter), T: Temperatur

Hinweis: Energieerhaltungsgleichung ⇒ Wärmeleitungsgleichung

Druck p:

① (Ideales Gas): Der Druck p ist proportional zur (Massen-)Dichte ρ und zur Temperatur T

(118) $p = C_R \rho T$

$C_R := \frac{k_B}{m_0}$: Gaskonstante, k_B: Boltzmann Konstante, m_0: Masse eines Gasteilchens

2.8 Herleitung ausgewählter partieller Differentialgleichungen:

2.8.1 Wärmeleitungsgleichung:

In diesem Abschnitt leiten wir die für die Thermodynamik relevante Wärmeleitungsgleichung (Diffusionsgleichung) her, diskutieren die verschiedenen Randbedingungen und bestimmen die entdimensionalisierte Wärmeleitungsgleichung.

① Herleitung (der Wärmeleitungsgleichung): Für die Herleitung benötigen wir die folgenden Hilfsmittel:

- Energieerhaltungsgleichung: (vgl. (110))

(119) $$\rho \partial_t u + \rho v \cdot \nabla u - \sigma : Dv + \nabla \cdot q = \rho g$$

wobei

ρ : Massendichte
u : (massenbezogene) Dichte der inneren Energie (spezifische innere Energie, innere Energiedichte)
v : Geschwindigkeitsfeld
ρv : Impulsdichte
σ : Spannungstensor
q : Wärmefluss ((flächenbezogene) Energiestromdichte, Wärmestrom)
g : (massenbezogene) Dichte der Wärmequelle
ρg : (volumetrische) Wärmestromdichte

- Fouriersches Gesetz: (vgl. (116))

(120) $$q = -\Lambda \nabla T$$

wobei

T : Temperatur
Λ : Wärmeleitfähigkeit (Wärmeleitzahl, spezifische Wärmeleitfähigkeit)

- Thermodynamische Zustandsgleichung: (vgl. (117))

(121) $$u = c_V T$$

wobei

c_V : spezifische Wärmekapazität (bei konstantem Volumen V)

Zur Herleitung eines Wärmediffusionsprozesses (ohne Strömung): Betrachte ein ruhendes Medium mit konstanter Massendichte. Setze $v = 0$ und $0 \neq \rho = \text{const}$ in (119), dann gilt

(122) $$\rho \partial_t u + \nabla \cdot q = \rho g \quad , \; t > 0, \; x \in \Omega, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ Gebiet}$$

Einsetzen von (120) und (121) in (122) liefert die

T unbekannt

Wärmeleitungsgleichung (Diffusionsgleichung): Für anisotrope Medien

(123) T $$\boxed{\rho c_V \partial_t T - \nabla \cdot (\Lambda \nabla T) = \rho g \quad , \; t > 0, \; x \in \Omega}$$

Hauptterm $\nabla \cdot (\Lambda \nabla T)$ in Divergenzform

bzw. für isotrope Medien ($\Lambda = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}$)

(124) T $$\boxed{\rho c_V \partial_t T - \lambda \Delta T = \rho g \quad , \; t > 0, \; x \in \Omega}$$

Hauptterm $\lambda \Delta T$ in divergenzfreier Form

Division von (124) durch ρc_p liefert

(125) $$\partial_t T - \alpha \Delta T = \frac{1}{c_V} \cdot g =: \bar{g} \quad , \; t > 0, \; x \in \Omega$$

wobei

$\alpha := \dfrac{\lambda}{\rho c_V}$: Temperaturleitfähigkeit (Temperaturleitzahl, Wärmediffusivität)

Das zu (123) gehörende stationäre Problem (setze $\partial_t T = 0$) liefert die stationäre Wärmeleitungsgleichung. Diese lautet für (123) bzw. (124)

Laplace-Gleichung:

(126) T $\quad -\nabla\cdot(\Lambda \nabla T) = \varrho g \quad , x \in \Omega$

bzw.

(127) T $\quad -\lambda \Delta T = \varrho g \quad , x \in \Omega$

inhomogene Wärmestromdichte ($g \neq 0$)

Liegen keine Wärmequellen vor ($g=0$) so liefern (126) bzw. (127)

Poisson-Gleichung:

(128) T $\quad -\nabla\cdot(\Lambda \nabla T) = 0 \quad , x \in \Omega$

bzw.

(129) T $\quad -\lambda \Delta T = 0 \quad , x \in \Omega$

homogene Wärmestromdichte ($g=0$)

E1 siehe unten.

② **Anfangsbedingungen & Randbedingungen:** Um jeweils eine eindeutige Lösung der Gleichungen (123), (124), (126), (127), (128), (129) zu erhalten müssen (aus mathematischer Sicht) zusätzliche Bedingungen gefordert werden. So müssen (123) und (124) mit **Anfangsbedingungen** versehen werden. Insofern $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (d.h. $\Omega \neq \mathbb{R}^3$), so müssen alle sechs Gleichungen zusätzlich mit **Randbedingungen** versehen werden.

Anfangsbedingung (für (123), (124)): Bei der **Anfangsbedingung** wird die Temperatur(=verteilung) zum Anfangszeitpunkt der Meßung $t=0$ vorgegeben:

(130) $\quad T(x,0) = T_0(x) \quad , x \in \Omega \quad , T_0$: **Anfangstemperatur**

Randbedingungen (für (123), (124), (126), (127), (128), (129) falls $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^3$): Bei den **Randbedingungen** werden Temperaturinformationen am Rand vorgegeben. Dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten:

Typ 1: (Dirichlet Randbedingung). Die Temperatur wird am Rand vorgegeben:

(131) $\quad T(x,t) = T_{bnd}(x,t) \quad , x \in \partial\Omega, t \geq 0$ (temperature)

Typ 2: (Neumann Randbedingung). Der Wärmefluss wird am Rand vorgegeben:

(132) $\quad \underset{(120)}{(-n\cdot q =)} -n\cdot(-\Lambda \nabla T(x,t)) = T_{flux}(x,t) \quad , x \in \partial\Omega, t \geq 0.$ (heat flux)

Falls $T_{flux} = 0$, so ist der Rand vollständig isoliert & es findet kein Wärmeaustausch statt (thermal insulation)

Typ 3: (Robin Randbedingung). Der Wärmefluss am Rand hängt von der Temperaturdifferenz zwischen innerer und äußerer Temperatur ab und fließt von dem Bereich höherer Temperatur zu dem Bereich niedrigerer Temperatur (2. Hauptsatz der Thermodyn.):

(133) $\quad \underbrace{-n\cdot(-\Lambda \nabla T(x,t))}_{\text{Fouriersches Gesetz des Wärmeleitens}} = \underbrace{h\,(T_{ext}(x,t) - T(x,t))}_{\text{Newtonsches Abkühlungsgesetz}} \quad , x \in \partial\Omega, t \geq 0$ (heat flux)

$= -n\cdot q$

wobei

h: **Wärmeübergangskoeffizient** (**Wärmeübergangszahl**, **Wärmeübertragungskoeffizient**), $h = h(x,t,T,T_{ext})$

T_{ext}: **Umgebungstemperatur** (**Außentemperatur**)

E1: Hängt die Dichte der Wärmequelle g zusätzlich von der Temperatur T oder von den Komponenten $\frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial x_2}, \frac{\partial T}{\partial x_3}$ des Temperaturgradienten ∇T ab (d.h. $g = g(x,t,T,\partial_{x_1}T,\partial_{x_2}T,\partial_{x_3}T)$) so sind (123) und (124) **Reaktions-Diffusions-Gleichungen** und (126) und (127) **nichtlineare Laplace-Gleichungen**.

③ Entdimensionalisierung der Wärmeleitungsgleichung:

Die Wärmeleitungsgleichung

(134) $\quad \varrho c_V \partial_t T - \nabla\cdot(\Lambda \nabla T) = \varrho g$

ist dimensionsbehaftet.

Parameter:

$$[\varrho] = M L^{-3}$$
$$[c_V] = L^2 T^{-2} \Theta^{-1}$$
$$[\Lambda] = M L T^{-3} \Theta^{-1}$$
$$[g] = L^2 T^{-3}$$

Variablen:

$$[x] = L$$
$$[t] = T$$
$$[T] = \Theta$$

Alle Terme der Wärmeleitungsgleichung haben die Dimension $M L^{-1} T^{-3}$:

$$[\varrho c_V \partial_t T] = M L^{-3} L^2 T^{-2} \Theta^{-1} T^{-1} \Theta = M L^{-1} T^{-3}$$
$$[\nabla\cdot(\Lambda \nabla T)] = L^{-1} M L T^{-3} \Theta^{-1} L^{-1} \Theta = M L^{-1} T^{-3}$$
$$[\varrho g] = M L^{-3} L^2 T^{-3} = M L^{-1} T^{-3}$$

Dimensionen: $\{M, L, T, \Theta\}$ ($K=4$ Grunddimensionen). Die Dimensionsmatrix lautet

$$A = \begin{array}{c} \\ M \\ L \\ T \\ \Theta \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varrho & c_p & \Lambda & g \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{4,4}$$

Wir führen die dimensionslosen Variablen

$$y := \frac{x}{\hat{x}}, \quad \tau := \frac{t}{\hat{t}}, \quad v(y,\tau) := \frac{T(x,t)}{\hat{T}} = \frac{T(\hat{x}y, \hat{t}\tau)}{\hat{T}}$$

ein, wobei

$\hat{x}$: charakteristische Länge mit $[\hat{x}] = L$,

$\hat{t}$: charakteristische Zeit mit $[\hat{t}] = T$,

$\hat{T}$: charakteristische Temperatur mit $[\hat{T}] = \Theta$.

Es gilt: (Annahme: Λ unabhängig von x)

- $\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{T} v\left(\frac{x}{\hat{x}}, \frac{t}{\hat{t}}\right)\right) = \hat{T} \frac{\partial v}{\partial \tau}\left(\frac{x}{\hat{x}}, \frac{t}{\hat{t}}\right) \frac{1}{\hat{t}} = \frac{\hat{T}}{\hat{t}} \partial_\tau v(y,\tau)$
- $\nabla_x T(x,t) = \nabla_x\left(\hat{T} v\left(\frac{x}{\hat{x}}, \frac{t}{\hat{t}}\right)\right) = \hat{T} (\nabla_y v)\left(\frac{x}{\hat{x}}, \frac{t}{\hat{t}}\right) \frac{1}{\hat{x}} = \frac{\hat{T}}{\hat{x}} \nabla_y v(y,\tau)$

(135) $\quad \Rightarrow \Lambda \nabla_x T(x,t) = \frac{\hat{T}}{\hat{x}} \Lambda \nabla_y v(y,\tau)$

$\quad \Rightarrow \nabla_x \cdot (\Lambda \nabla_x T(x,t)) = \nabla_y \cdot \left(\frac{\hat{T}}{\hat{x}^2} \Lambda \nabla_y v(y,\tau)\right)$

- $\varrho g(x,t) = \varrho g(\hat{x}y, \hat{t}\tau)$

Einsetzen von (135) in (134) liefert

(136) $\quad \frac{\hat{T} \varrho c_V}{\hat{t}} \partial_\tau v(y,\tau) - \nabla\cdot\left(\frac{\hat{T}}{\hat{x}^2} \Lambda \nabla v(y,\tau)\right) = \varrho g(\hat{x}y, \hat{t}\tau)$

Multiplikation von (136) mit $\frac{\hat{t}}{\hat{T}\rho c_V}$ liefert die

Entdimensionalisierte Wärmeleitungsgleichung:

(137) $$\partial_\tau v(y,\tau) - \nabla\cdot\left(\mathrm{Fo}\,\nabla v(y,\tau)\right) = \tilde{g}(y,\tau)$$

bzw.

(138) $$\partial_\tau v(y,\tau) - \mathrm{Fo}\,\Delta v(y,\tau) = \tilde{g}(y,\tau)$$

wobei

$$\tilde{g}(y,\tau) := \frac{\hat{t}}{\hat{T} c_V}\, g(\hat{x}y, \hat{t}\tau)$$

$$\mathrm{Fo} := \frac{\hat{t}}{\hat{x}^2}\cdot\frac{\Lambda}{\rho c_V}$$: thermische Fourier-Zahl (→ dimensionslose Kennzahl)

$\alpha := \frac{\Lambda}{\rho c_V}$: Temperaturleitfähigkeit (Temperaturleitzahl, Wärmediffusivität)

$s := \rho c_V$: Wärmespeicherzahl

Die entdimensionalisierte Anfangsbedingung lautet, $\tilde{\Omega} := \{\frac{x}{\hat{x}} \mid x \in \Omega\}$ skaliertes Gebiet,

(139) $$v(y,0) = \frac{T(\hat{x}y, 0)}{\hat{T}} =: v_0(y), \quad y \in \tilde{\Omega}.$$

Die entdimensionalisierten Randbedingungen lauten

(140) $$v(y,\tau) = \frac{T(\hat{x}y,\hat{t}\tau)}{\hat{T}} = \frac{T_{bnd}(\hat{x}y,\hat{t}\tau)}{\hat{T}} =: \tilde{T}_{bnd}(y,\tau), \quad y\in\partial\tilde{\Omega}, \; t \geq 0,$$

und

$$-\nabla_x T(x,t) = -\frac{\hat{T}}{\hat{x}}\nabla_y v(y,\tau)$$

$$\Rightarrow -n\cdot\left(-\Lambda\nabla_x T(x,t)\right) = -n\cdot\left(-\frac{\hat{T}}{\hat{x}}\Lambda\nabla_y v(y,\tau)\right)$$

(141) $$\underset{\cdot\frac{1}{\hat{x}\rho c_p}}{\Rightarrow} -n\cdot\left(-\mathrm{Fo}\,\nabla v(y,\tau)\right) = \frac{T_{flux}(\hat{x}y,\hat{t}\tau)}{\hat{x}\rho c_V} =: \tilde{T}_{flux}(y,\tau), \quad y\in\partial\tilde{\Omega}, \; t\geq 0$$

und

$$-n\cdot\left(-\frac{\hat{T}}{\hat{x}}\Lambda\nabla_y v(y,\tau)\right) = h\left(T_{ext}(\hat{x}y,\hat{t}\tau) - \hat{T}v(y,\tau)\right)$$

$$\underset{\cdot\frac{1}{\hat{x}\rho c_p}}{\Rightarrow} -n\cdot\left(-\underbrace{\frac{\hat{T}}{\hat{x}^2}\frac{\Lambda}{\rho c_V}}_{=\mathrm{Fo}}\nabla_y v(y,\tau)\right) = \underbrace{\frac{\hat{T}\Lambda}{\hat{x}^2\rho c_V}}_{=\mathrm{Fo}}\cdot\underbrace{\frac{\hat{x}h}{\Lambda}}_{=\mathrm{Nu}}\left(\underbrace{\frac{T_{ext}(\hat{x}y,\hat{t}\tau)}{\hat{T}}}_{=:v_{ext}(y,\tau)} - v(y,\tau)\right)$$

falls Λ invertierbar!

(142) $$\Rightarrow -n\cdot\left(-\mathrm{Fo}\,\nabla v(y,\tau)\right) = \mathrm{Fo}\,\mathrm{Nu}\left(v_{ext}(y,\tau) - v(y,\tau)\right), \quad y\in\partial\tilde{\Omega}, \; t\geq 0$$

wobei

$$\mathrm{Fo} := \frac{\hat{t}}{\hat{x}}\cdot\overbrace{\frac{\Lambda}{\rho c_V}}^{=\alpha}$$: thermische Fourier-Zahl (→ dimensionslose Kennzahl)

$$\mathrm{Nu} := \hat{x}h\Lambda^{-1}$$: Nußelt-Zahl (→ dimensionslose Kennzahl)

$$\alpha := \frac{\Lambda}{\rho\cdot c_V}$$

thermal conductivity (W/(m·K))

thermal diffusivity (m²/s)

volumetric heat capacity (J/(m³·K))

specific heat capacity (J/(Kg·K))

volumetric mass density (Kg/m³)

2.8.2. Eulersche Gleichungen und Navier-Stokes Gleichungen:

In diesem Abschnitt leiten wir die für die Strömungsmechanik relevanten Navier-Stokes-Gleichungen her, diskutieren die verschiedenen Randbedingungen und bestimmen die entdimensionalisierten Navier-Stokes Gleichungen. In der Strömungsmechanik bilden die Navier-Stokes Gleichungen ein mathematisches Modell zur Beschreibung von Strömungen viskoser Fluide (Gase & Flüssigkeiten), d.h. von Strömungen unter Berücksichtigung der inneren Reibung (Viskosität) des Fluids. Eine Vereinfachung dieses Modelles bilden die Eulerschen Gleichungen. Diese bilden in der Strömungsmechanik ein mathematisches Modell zur Beschreibung von Strömungen reibungsfreier Fluide, d.h. von Strömungen ohne Berücksichtigung der inneren Reibung des Fluids. Im Zuge dieses Abschnittes werden wir auch für die Eulerschen Gleichungen die verschiedenen Randbedingungen behandeln, die entdimensionalisierten Eulerschen Gleichungen herleiten und grundlegende Unterschiede zu den Navier-Stokes Gleichungen diskutieren.

(1) Herleitung (der Eulerschen Gleichungen & der Navier-Stokes Gleichungen):

Für die Herleitung benötigen wir die folgenden Hilfsmittel:

- **Kontinuitätsgleichung**: (vgl. (75))

(143) $$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0$$

- **Impulserhaltungsgleichung**: (vgl. (85))

(144) $$\rho \partial_t v + \rho (v \cdot \nabla) v - \nabla \cdot \sigma = \rho f$$

- **Energieerhaltungsgleichung**: (vgl. (110))

(145) $$\rho \partial_t u + \rho v \cdot \nabla u - \sigma : Dv + \nabla \cdot q = \rho g$$

wobei

- ρ : Massendichte $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$
- v : Geschwindigkeitsfeld $\left(\frac{m}{s}\right)$
- ρv : Impulsdichte $\left(\frac{kg}{m^2 s}\right)$
- σ : Spannungstensor $\left(\frac{kg}{m s^2}\right)$
- ρf : Volumenkraftdichte $\left(\frac{kg}{m^2 s^2}\right)$
- u : (massenbezogene) Dichte der inneren Energie $\left(\frac{m^2}{s^2} = \frac{J}{kg}\right)$
- q : (flächenbezogene) Wärmestromdichte $\left(\frac{kg}{s^3} = \frac{W}{m^2}\right)$
- ρg : (volumetrische) Wärmestromdichte $\left(\frac{kg}{m s^3} = \frac{W}{m^3}\right)$

- **Spannungstensor**: (vgl. (114) & (115)) „Spannungstensor σ"

ideales Gas, d.h. es können nur Druckkräfte übertragen werden

(146) $$\sigma = -pI$$ (für reibungsfreie Strömungen)

(147) $$\sigma = -pI + \mu (Dv + (Dv)^T) + \lambda (\nabla \cdot v) I$$ (für viskose Strömungen)

Newtonsches Fluid, d.h. es können Druck- & Zähigkeitskräfte übertragen werden.

wobei

- p : Druck $\left(Pa = \frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m s^2}\right)$, $p = p(x,t) \in \mathbb{R}$
- μ : dynamische Viskosität (Scherviskosität, 2. Lamé-Konstante) $\left(Pa \cdot s = \frac{N \cdot s}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s}\right)$
- λ : 1. Lamé-Konstante (2. Viskositätskoeffizient) $\left(Pa \cdot s = \frac{N \cdot s}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s}\right)$
- $\nu := \frac{\mu}{\rho}$: Kinematische Viskosität $\left(\frac{m^2}{s}\right)$
- $\phi := \frac{1}{\nu \rho} = \frac{1}{\mu}$: Fluidität $\left(\frac{m \cdot s}{kg}\right)$
- $\zeta := \lambda + \frac{2}{3}\mu$: Volumenviskosität $\left(Pa \cdot s = \frac{N \cdot s}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s}\right)$

$\mu = \mu(T, c)$
$\lambda = \lambda(T, c)$
c: concentra.

Stokes Hypothese „$p_t = p_m$" (p_t: thermodyn. Druck, p_m mechanischer Druck) erfüllt $\Longleftrightarrow$ $\zeta = 0$ oder $\nabla \cdot v = 0$ oder Gas im thermodynamischen Gleichgewicht

$\Updownarrow$

$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$

Im Falle einer reibungsfreien Strömung erfüllt σ aus (146)

(148) $\quad \nabla\cdot\sigma = -\nabla p$

(149) $\quad \sigma : Dv = -\nabla p \cdot v$

Im Falle einer viskosen Strömung erfüllt σ aus (147)

(150) $\quad \nabla\cdot\sigma = \mu\Delta v + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot v) - \nabla p$

(151) $\quad \sigma : Dv =$

• Fouriersches Gesetz: (vgl. (116)) „Wärmefluss q"

(152) $\quad q = -\Lambda\nabla T$

wobei

T : Temperatur (K)

Λ : Wärmeleitfähigkeit $\left(\frac{W}{m\cdot K} = \frac{kg}{s^3\cdot m\cdot K}\right)$

Einsetzen von (148) in (144) sowie (149) und (152) in (145) liefert die

Eulerschen Gleichungen:

(153) $\quad p \quad \boxed{\partial_t\varrho + \nabla\cdot(\varrho v) = 0}$

(154) $\quad v \quad \boxed{\varrho\partial_t v + \varrho(v\cdot\nabla)v = -\nabla p + \varrho f}$

(155) $\quad T \quad \boxed{\varrho\partial_t u + \varrho v\cdot\nabla u + \nabla p\cdot v - \nabla\cdot(\Lambda\nabla T) = \varrho g}$

Einsetzen von (150) in (144) sowie (151) und (152) in (145) liefert die

Navier-Stokes-Gleichungen:

(156) $\quad p \quad \boxed{\partial_t\varrho + \nabla\cdot(\varrho v) = 0}$

(157) $\quad v \quad \boxed{\varrho\partial_t v + \varrho(v\cdot\nabla)v = \mu\Delta v + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot v) - \nabla p + \varrho f}$

(158) $\quad T \quad \boxed{\varrho\partial_t u + \varrho v\cdot\nabla u}$

In beiden Fällen sind v, p und T die unbekannten (gesuchten) Größen und μ, $\lambda := -\frac{2}{3}\mu$, Λ, f und g die bekannten (gegebenen) Größen. Für die verbleibenden unbekannten (nicht gesuchten) Größen u und ϱ müssen jeweils als Funktion von p und T bekannt sein:

(159) $\quad u \quad f_1(u,T) = 0$ (Innere Energie-Temperatur Beziehung)

(160) $\quad \varrho \quad f_2(p,\varrho,T) = 0$ (Druck-Dichte-Temperatur Beziehung)

f_1 und f_2 sind thermodynamische Zustandsgleichungen, beschreiben die thermodynamischen Eigenschaften des Materials und resultieren aus physikalischen Experimenten.

Beispiel: (Gasdynamik). Für ideale Gase gilt die

• Innere Energie-Temperatur Beziehung:

(161) $\quad u = c_V T \qquad f_1(u,T) := u - c_V T = 0$

wobei

c_V : spezifische Wärmekapazität $\left(\frac{J}{kg\cdot K} = \frac{m^2}{s^2\cdot K}\right)$

und die

• Druck-Dichte-Temperatur Beziehung:

(162) $\quad p = C_R\varrho T \qquad f_2(p,\varrho,T) := p - C_R\varrho T = 0$

wobei

$C_R := \frac{k_B}{m_0}$: Gaskonstante $\left(\frac{J}{kg\cdot K} = \frac{m^2}{s^2\cdot K}\right)$

$k_B := 1.380\cdot 10^{-23}$ $\left(\frac{J}{K} = \frac{kg\cdot m^2}{s^2\cdot K}\right)$: Boltzmann-Konstante

m_0 : Masse eines Gasteilchens (kg).

Durch Einsetzen von (161) und (162) in (155) gehen (153)–(155) über in die

Eulerschen Gleichungen der Gasdynamik:

$$\boxed{\begin{array}{ll} p & \partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho v) = 0 \\ v & \rho\partial_t v + \rho(v\cdot\nabla)v = -\nabla p + \rho f \\ T & \rho c_V \partial_t T + \rho c_V v\cdot\nabla T - \nabla\cdot(\Lambda\nabla T) = -\nabla p\cdot v + \rho g \\ \rho & p = c_R \rho T \end{array}}$$

② Charakterisierungen von Strömungen:

Es gibt verschiedene Möglichkeiten Strömungen zu klassifizieren:

- Verhalten des Fluids:
  inkompressibel vs. kompressibel
  $\rho(x,t) = \text{const} > 0$ — $\rho(x,t) \neq \text{const}$
  eigentlich $\nabla\cdot v = 0 \xRightarrow{\text{Kontin.Gl}}$ materielle Abl. von $\rho = 0$
- Strömungsart:
  instationär (zeitkontinuierlich) vs. stationär
  $\partial_t\rho = \partial_t p = \partial_t v = \partial_t T = 0$
  bzw. $\rho(x,t) = \rho(x)$, $p(x,t) = p(x)$ ...
- Strömungsform:
  laminar vs. turbulent
  $Re < Re_{krit}$, keine Wirbelbildung — Wirbelbildung, $Re > Re_{krit}$
- Art des Fluids:
  reibungsfrei vs. viskos (reibungsbehaftet)
  $\mu = \lambda = 0$ — $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$
- Einfluss der Temperatur:
  isotherm vs. nicht-isotherm
  $T(x,t) = \text{const}$ — $T(x,t) \neq \text{const}$
- Art des Leiters:
  Umströmungen vs. Durchströmungen vs. Sickerströmungen
  vs. Strömungen in offenen Gerinnen

usw.

Bezeichnungen:

Wir nennen eine Strömung **reibungsfrei**, falls die innere Reibung (**Viskosität**) vernachlässigt werden kann. Andernfalls nennen wir die Strömung **viskos**. Weiter nennen wir eine Strömung **inkompressibel**, falls die Massendichte ρ (räumlich & zeitlich) konstant ist. Andernfalls nennen wir die Strömung **kompressibel**. Darüber hinaus nennen wir eine Strömung **isotherm**, falls die Temperatur T (räumlich & zeitlich) konstant ist. Wir nennen eine Strömung **laminar**, falls sie keine Turbulenzen (Verwirblungen) aufweist. Andernfalls nennen wir die Strömung **turbulent**. Schließlich nennen wir eine Strömung **stationär**, falls der Fluss im zeitlichen Verlauf keine räumlichen Veränderungen aufweist. Andernfalls nennen wir die Strömung **instationär**