Aufgabe 3 (Reibungsfreies Pendel)

Es bezeichne:

$t\ [T]$: Periodendauer

$l\ [L]$: Pendellänge

$g\ [LT^{-2}]$: Erdbeschleunigung

$m\ [M]$: Masse

Dimensionsanalyse:

Annahme: (Argumente von f sind $N=3$ Parameter)

$$t = f(l, g, m)$$

Dimensionen: $\{L, M, T\}$ ($K=3$ Grunddimensionen)

$[t] = T = L^0 M^0 T^1$ $\Rightarrow$ Dimensionsvektor von t: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$[l] = L = L^1 M^0 T^0$ $\Rightarrow$ Dimensionsvektor von l: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$[g] = LT^{-2} = L^1 M^0 T^{-2}$ $\Rightarrow$ Dimensionsvektor von g: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$[m] = M = L^0 M^1 T^0$ $\Rightarrow$ Dimensionsvektor von m: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dimensionsmatrix: ($K \times N = 3 \times 3$) enthält die Dimensionsvektoren der Parameter von f, d.h. von l, g, m:

$$A := \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} l & g & m \end{array} \\ \begin{array}{c} L \\ M \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Gleichungssystem: Bestimme $0 \neq \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T \in \mathbb{R}^3$ (da $N=3$) mit

$$A \cdot \alpha = 0 \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{da } K=3)$$

Lösung: Die Matrix A hat den Rang 3, d.h. $r := \operatorname{rang}(A) = 3$, somit besitzt das Gleichungssystem keine nicht-triviale Lösung. Die Anzahl der dimensionslosen Parameter ist $p := N - r = 3 - 3 = 0$. Somit existieren keine dimensionslosen Parameter π_i (π-Faktoren).

Dimensionsvektor von t:

$$a := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem: Bestimme $0 \neq \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T \in \mathbb{R}^3$ (da $N=3$) mit

$$A \cdot \beta = -a$$

Lösung:

$$\beta = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dimensionslose Unbekannte:

$$\pi = t \cdot l^{\beta_1} \cdot g^{\beta_2} \cdot m^{\beta_3} = t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Nach dem Buckinghamschen π-Theorem gilt: „Es existiert eine von den dimensionslosen Parametern π_i abhängige Funktion G mit $\pi = G(\pi_1, \dots, \pi_p)$". Da in diesem Fall keine dimensionslosen Parameter vorliegen, muss die Funktion G konstant sein, d.h.

$$t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = \pi \overset{!}{=} G = \text{const}$$

also

$$t = \text{const} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Phy. Beobachtung: Die Pendeldauer hängt nicht von der Masse ab! (Lösen der DGL zeigt, dass $\text{const} = 2\pi$ gelten muss)

Die Konstante const lässt sich nun beispielsweise durch ein Experiment schätzen.

Alternativlösung:

Annahme: (Argumente von f sind $N=4$ Parameter)

$$0 = f(l, g, m, t)$$

Dimensionen: $\{L, M, T\}$ ($K=3$ Grunddimensionen)

siehe oben

Dimensionsmatrix: ($K \times N = 3\times 4$) enthält die Dimensionsvektoren der Parameter von f, also von l, g, m, t:

$$A := \begin{array}{c} \\ L \\ M \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} l & g & m & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

Gleichungssystem: Bestimme $0 \neq \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^T \in \mathbb{R}^4$ (da $N=4$) mit

$$A \cdot \alpha = 0 \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{da } K=3)$$

Lösung: Die Matrix A hat den Rang 3, d.h. $r := \operatorname{rang}(A) = 3$, somit besitzt das Gleichungssystem genau $N - r = 4-3 = 1$ linear unabhängige Lösungen $\alpha \in \mathbb{R}^4$. Diese lautet:

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

π - Faktoren (dimensionslose Parameter π_i)

$$\pi_1 = l^{\alpha_1} \cdot g^{\alpha_2} \cdot m^{\alpha_3} \cdot t^{\alpha_4} = t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Dimensionslose Unbekannte:

$$\pi = 0 \cdot l^{\beta_1} \cdot g^{\beta_2} \cdot m^{\beta_3} = 0 \qquad \forall \beta \in \mathbb{R}^3$$

Nach dem Buckinghamschen π-Theorem gilt: „Es existiert eine von den dimensionslosen Parametern π_i abhängige Funktion G mit $\pi = G(\pi_1, \dots, \pi_p)$, wobei $p = N - r$ gilt." D.h.

$$0 = \pi = G(\pi_1).$$

Ist G bijektiv in 0, so gilt:

$$t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = \pi_1 = G^{-1}(G(\pi_1)) = G^{-1}(0) = const$$

und somit

$$t = const \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Wir erhalten also dieselbe Lösung wie oben.