Aufgabe 4 (Federpendel)

Es bezeichne:

$t\,[T]$: Schwingungsdauer

$m\,[M]$: Masse

$c\,[MT^{-2}]$: Federkonstante

Dimensionsanalyse:

Annahme: (Argumente von f sind $N=2$ Parameter)

$$t = f(m,c)$$

Dimensionen: $\{L,M,T\}$ ($K=3$ Grunddimensionen)

$$[t] = T = L^0 M^0 T^1 \quad \Rightarrow \text{Dimensionsvektor von } t: \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$[m] = M = L^0 M^1 T^0 \quad \Rightarrow \text{Dimensionsvektor von } m: \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$[c] = MT^{-2} = L^0 M^1 T^{-2} \quad \Rightarrow \text{Dimensionsvektor von } c: \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Dimensionsmatrix: ($K \times N = 3\times 2$) enthält die Dimensionsvektoren der Parameter von f, also von m, c:

$$A := \begin{array}{c} \\ L \\ M \\ T \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Gleichungssystem: Bestimme $0 \neq \alpha = (\alpha_1,\alpha_2)^T \in \mathbb{R}^2$ (da $N=2$) mit

$$A\cdot\alpha = 0 \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{da } K=3)$$

Lösung: Die Gleichung $A\alpha=0$ besitzt nur die triviale Lösung $\alpha=(0,0)^T$ und somit keine nicht-triviale Lösung. Die Anzahl der dimensionslosen Parameter ist $p=0$. Somit existieren keine dimensionslosen Parameter Π_i.

Dimensionsvektor von t:

$$a := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Gleichungssystem: Bestimme $0 \neq \beta = (\beta_1,\beta_2)^T \in \mathbb{R}^2$ (da $N=2$) mit

$$A\cdot\beta = -a$$

Lösung:

$$\beta = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Dimensionslose Unbekannte:

$$\Pi = t\cdot m^{\beta_1}\cdot c^{\beta_2} = t\cdot\sqrt{\frac{c}{m}}$$

Nach dem Buckinghamschen Π-Theorem gilt: „Es existiert eine von den dimensionslosen Parametern Π_i abhängige Funktion G mit $\Pi = G(\Pi_1,\dots,\Pi_p)$." Da in diesem Fall keine dimensionslosen Parameter vorliegen, muss die Funktion G konstant sein, d.h.

$$t\cdot\sqrt{\frac{c}{m}} = \Pi \overset{!}{=} G = \text{const}$$

also

$$t = \text{const}\cdot\sqrt{\frac{m}{c}}$$

Die Konstante const lässt sich nun beispielsweise durch ein Experiment schätzen.

Alternativlösung:

Annahme: (Argumente von f sind $N=3$ Parameter)

$$0 = f(m, c, t)$$

Dimensionen: $\{L, M, T\}$ ($K=3$ Grunddimensionen)

siehe oben

Dimensionsmatrix: ($K \times N = 3 \times 3$) enthält die Dimensionsvektoren der Parameter von f, also von m, c, t:

$$A := \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} m & c & t \end{array} \\ \begin{array}{c} L \\ M \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Gleichungssystem: Bestimme $0 \neq \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T \in \mathbb{R}^3$ (da $N=3$) mit

$$A \cdot \alpha = 0 \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{da } K=3)$$

Lösung: Die Matrix A hat den Rang 2, d.h. $r := \operatorname{rang}(A) = 2$, somit besitzt das Gleichungssystem genau $N - r = 3 - 2 = 1$ linear unabhängige Lösung $\alpha \in \mathbb{R}^3$. Diese lautet:

$$\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

π-Faktoren (dimensionslose Parameter π_i):

$$\pi_1 = m^{\alpha_1} \cdot c^{\alpha_2} \cdot t^{\alpha_3} = t \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Dimensionslose Unbekannte:

$$\pi = 0 \cdot m^{\beta_1} \cdot c^{\beta_2} \cdot t^{\beta_3} = 0 \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^3$$

Nach dem Buckinghamschen π-Theorem gilt: „Es existiert eine von den dimensionslosen Parametern π_i abhängige Funktion G mit $\pi = G(\pi_1, \dots, \pi_p)$, wobei $p = N - r$ gilt." D.h.

$$0 = \pi = G(\pi_1)$$

Ist G bijektiv in 0, so gilt

$$t \cdot \sqrt{\frac{c}{m}} = \pi_1 = G^{-1}(G(\pi_1)) = G^{-1}(0) = \text{const}$$

und somit

$$t = \text{const} \cdot \sqrt{\frac{m}{c}}$$

Wir erhalten also dieselbe Lösung wie oben.