Aufgabe 5 (Rotierender Ring)

Es bezeichne:

$\sigma\ [L^{-1}MT^{-2}]$: Spannung

$\omega\ [T^{-1}]$: Rotationsgeschwindigkeit

$R\ [L]$: Radius

$\rho\ [L^{-3}M]$: Dichte

Dimensionsanalyse:

Annahme: (Argumente von f sind $N=3$ Parameter)

$$\sigma = f(\omega, R, \rho)$$

Dimensionen: $\{L, M, T\}$ ($K=3$ Grunddimensionen)

$$[\sigma] = L^{-1}MT^{-2} = L^{-1}M^{1}T^{-2} \quad \Rightarrow \text{Dimensionsvektor von } \sigma: \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$[\omega] = T^{-1} = L^{0}M^{0}T^{-1} \quad \Rightarrow \text{Dimensionsvektor von } \omega: \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$[R] = L = L^{1}M^{0}T^{0} \quad \Rightarrow \text{Dimensionsvektor von } R: \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$[\rho] = L^{-3}M = L^{-3}M^{1}T^{0} \quad \Rightarrow \text{Dimensionsvektor von } \rho: \begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$$

Dimensionsmatrix: ($K\times N = 3\times 3$) enthält die Dimensionsvektoren der Parameter von f, d.h. von ω, R, ρ:

$$A := \begin{array}{c} \\ L \\ M \\ T \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \omega & R & \rho \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Gleichungssystem: Bestimme $0 \neq \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T \in \mathbb{R}^3$ (da $N=3$) mit

$$A\cdot\alpha = 0 \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{da } K=3)$$

Lösung: Die Matrix A hat den Rang 3, d.h. $r := \mathrm{rang}(A) = 3$, somit besitzt das Gleichungssystem keine nicht-triviale Lösung. Die Anzahl der dimensionslosen Parameter ist $p := N - r = 3-3 = 0$. Somit existieren keine dimensionslosen Parameter π_i (π-Faktoren).

Dimensionsvektor von σ:

$$a := \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Gleichungssystem: Bestimme $0 \neq \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T \in \mathbb{R}^3$ (da $N=3$) mit

$$A\cdot\beta = -a$$

Lösung:

$$\beta = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

Dimensionslose Unbekannte:

$$\pi = \sigma\cdot\omega^{\beta_1}\cdot R^{\beta_2}\cdot\rho^{\beta_3} = \frac{\sigma}{\omega^2 R^2 \rho}$$

Nach dem Buckinghamschen π-Theorem gilt: „Es existiert eine von den dimensionslosen Parametern π_i abhängige Funktion G mit $\pi = G(\pi_1, \dots, \pi_p)$." Da in diesem Fall keine dimensionslosen Parameter vorliegen, muss die Funktion G konstant sein, d.h.

$$\frac{\sigma}{\omega^2 R^2 \rho} = \pi \overset{!}{=} G = \text{const}$$

also

$$\sigma = \text{const}\cdot\omega^2 R^2 \rho$$

Die Konstante const lässt sich nun beispielsweise durch ein Experiment schätzen.

Physikalische Beobachtung: Die Spannung hängt linear von der Dichte und quadratisch von der Rotationsgeschwindigkeit und dem Radius ab.