Aufgabe 6 (Nuklearexplosion – Trinity-Test).

Es bezeichne:

$R\,[L]$: Radius der Schockwelle

$E\,[L^2MT^{-2}]$: durch die Explosion freigesetzte Energie

$t\,[T]$: verstrichene Zeit, seitdem die Explosion stattgefunden hat

$\rho\,[ML^{-3}]$: Luftdichte vor der Explosion bzw. außerhalb der Schockwelle

Dimensionsanalyse:

Annahme: (Argumente von f sind $N=3$ Parameter)

$$R = f(E, t, \rho)$$

Dimensionen: $\{L, M, T\}$ ($K=3$ Grunddimensionen)

$[R] = L = L^1 M^0 T^0$ $\Rightarrow$ Dimensionsvektor von R : $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$[E] = L^2 M T^{-2} = L^2 M^1 T^{-2}$ $\Rightarrow$ Dimensionsvektor von E : $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$

$[t] = T = L^0 M^0 T^1$ $\Rightarrow$ Dimensionsvektor von t : $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$[\rho] = ML^{-3} = L^{-3} M^1 T^0$ $\Rightarrow$ Dimensionsvektor von ρ : $\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$

Dimensionsmatrix: ($K \times N = 3\times 3$) enthält die Dimensionsvektoren der Parameter von f, also von E, t, ρ

$$A := \begin{array}{c} \\ L \\ M \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E & t & \rho \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Gleichungssystem: Bestimme $0 \neq \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T \in \mathbb{R}^3$ (da $N=3$) mit

$$A \cdot \alpha = 0 \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{da } K=3)$$

Lösung: Da die Matrix A den Rang 3 hat, d.h. $r := \operatorname{rang}(A) = 3$, besitzt das Gleichungssystem keine nicht-triviale Lösung. Die Anzahl der dimensionslosen Parameter ist $p := N - r = 3-3 = 0$. Somit existieren keine dimensionslosen Parameter π_i (π-Faktoren).

Dimensionsvektor von R:

$$a := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Gleichungssystem: Bestimme $0 \neq \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ (da $N=3$) mit

$$A \cdot \beta = -a$$

Lösung:

$$\beta = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Dimensionslose Unbekannte:

$$\pi = R \cdot E^{\beta_1} \cdot t^{\beta_2} \cdot \rho^{\beta_3} = R \cdot \left(\frac{\rho}{E t^2}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Nach dem Buckinghamschen π-Theorem gilt: „Es existiert eine von den dimensionslosen Parametern π_i abhängige Funktion G mit $\pi = G(\pi_1, \dots, \pi_p)$." Da in diesem Fall keine dimensionslosen Parameter vorliegen, muss die Funktion G konstant sein, d.h.

$$R \cdot \left(\frac{\rho}{E \cdot t^2}\right)^{\frac{1}{5}} = \pi \overset{!}{=} G = \text{const}$$

also

$$R = \text{const} \cdot \left(\frac{E \cdot t^2}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Die Konstante const lässt sich mit einer Vergleichsexplosion bestimmen.

Anwendung:

Auflösen nach E:

$$E = \frac{R^5 \cdot \rho}{const^5 \cdot t^2}$$ Beachte: $R = R(t)$, $E = E(R(t), t)$

Zum Zeitpunkt der Explosion lag die Temperatur bei 20°C, in Kelvin bedeutet dies

$$T = 20 + 273{,}15 = 293{,}15 \text{ K}$$

Luftdichte ρ: Für trockene Luft gilt

$$\rho = \frac{p}{R_s \cdot T}$$, d.h. $$\text{Luftdichte } (kg \cdot m^{-3}) = \frac{\text{atmosphärischer Luftdruck (Pa)}}{\text{spezifische Gaskonst.} \left(\frac{J}{kg \cdot K}\right) \cdot \text{Temperatur (K)}}$$

$$1 \text{ Pa} = 1 \frac{kg}{m \cdot s^2}, \quad 1 J = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$$

wobei

$$p = 101325 \text{ Pa}$$
$$R_s = 287{,}058 \frac{J}{kg \cdot K}$$
$$T = 293{,}15 \text{ K}$$

Daraus erhalten wir die Luftdichte ρ:

$$\rho = 1{,}204 \frac{kg}{m^3}$$

Wir nehmen (aufgrund unseres Hintergrundwissens über Atombomben) const = 1 an. Eine Messung zum Zeitpunkt $t = 0.025$ s ergab einen Schockwellenradius von $R = 130$ m. Daraus erhalten wir die zum Zeitpunkt $t = 0.025$ s freigesetzte Energie

$$E = \frac{130^5 \cdot 1{,}204}{1^5 \cdot 0{,}025^2} J = 7{,}15 \cdot 10^{13} J$$

Da 1 Tonne TNT eine Energie von 4,18 Milliarden Joule besitzt gilt

$$E \mathrel{\hat{=}} \frac{7{,}15 \cdot 10^{13}}{4{,}18 \cdot 10^9} \text{ Tonnen TNT} = 17.095 \text{ Tonnen TNT}$$

Erweiterung:

Es bezeichne zusätzlich:

$p\,[M L^{-1} T^{-2}]$: Luftdruck vor der Explosion bzw. außerhalb der Schockwelle

Dimensionsanalyse:

Annahme: (Argumente von f sind $N=4$ Parameter)

$$R = f(E, t, \rho, p)$$

Dimensionen: $\{L, M, T\}$ ($K=3$ Grunddimensionen)

$$[p] = M L^{-1} T^{-2} = L^{-1} M^{1} T^{-2} \quad \Rightarrow \text{Dimensionsvektor von } p : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Rest siehe oben

Dimensionsmatrix: ($K \times N = 3\times 4$) enthält die Dimensionsvektoren der Parameter von f, also von E, t, ρ, p:

$$A := \begin{array}{c} \\ L \\ M \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E & t & \rho & p \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

Gleichungssystem: Bestimme $0 \neq \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^T \in \mathbb{R}^4$ (da $N=4$) mit

$$A\cdot\alpha = 0 \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{da } K=3)$$

Lösung: $r := \operatorname{rang}(A) = 3 \Rightarrow \max\{N, K\} - r = 4 - 3 = 1 \neq p$ linear unabhängige Lösungen:

$$\alpha = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Π-Faktoren (dimensionslose Parameter Π_i)

$$\Pi_1 = E^{\alpha_1}\cdot t^{\alpha_2}\cdot \rho^{\alpha_3}\cdot p^{\alpha_4} = \left(\frac{t^6\cdot p^5}{E^2\cdot \rho^3}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Dimensionsvektor von R:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem: Bestimme $0 \neq \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)^T \in \mathbb{R}^4$ (da $N=4$) mit

$$A\cdot\beta = -a$$

Lösung:

$$\beta = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\cdot\alpha \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

Setze $c = 0$, so gilt

$$\beta = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dimensionslose Unbekannte:

$$\Pi = R\cdot E^{\beta_1}\cdot t^{\beta_2}\cdot \rho^{\beta_3}\cdot p^{\beta_4} = R\cdot\left(\frac{\rho}{E\cdot t^2}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Nach dem Buckinghamschen Π-Theorem gilt: „Es existiert eine von den dimensionslosen Parametern Π_i abhängige Funktion G mit $\Pi = G(\Pi_1, \dots, \Pi_p)$.", d.h.

$$\Pi = G(\Pi_1)$$

bzw.

$$R\left(\frac{\rho}{E\cdot t^2}\right)^{\frac{1}{5}} = G(\Pi_1) \iff R = \left(\frac{E\cdot t^2}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}}\cdot G(\Pi_1) = E^{\frac{1}{5}}\cdot t^{\frac{2}{5}}\cdot \rho^{-\frac{1}{5}}\cdot G(\Pi_1).$$