Aufgabe 7 (Leistung zum Fortbewegen von Schiffen – Reynolds-Zahl und Froude-Zahl)

Es bezeichne:

$P[ML^2T^{-3}]$: Leistung, die notwendig ist, um das Schiff auf dem Meer fortzubewegen

$l[L]$: Länge des Schiffes

$v[LT^{-1}]$: Geschwindigkeit des Schiffes

$\rho[ML^{-3}]$: Dichte des Wassers

$\nu[L^2T^{-1}]$: Kinematische Viskosität des Wassers

$g[LT^{-2}]$: Erdbeschleunigung

Dimensionsanalyse:

Annahme: (Argumente von f sind $N=5$)

$$P = f(l, v, \rho, \nu, g)$$

Dimensionen: $\{L, M, T\}$ ($K=3$ Grunddimensionen)

$[P] = ML^2T^{-3} = L^2M^1T^{-3} \Rightarrow$ Dimensionsvektor von P: $\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$

$[l] = L = L^1M^0T^0 \Rightarrow$ " " l: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$[v] = LT^{-1} = L^1M^0T^{-1} \Rightarrow$ " " v: $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$[\rho] = ML^{-3} = L^{-3}M^1T^0 \Rightarrow$ " " ρ: $\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$

$[\nu] = L^2T^{-1} = L^2M^0T^{-1} \Rightarrow$ " " ν: $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

$[g] = LT^{-2} = L^1M^0T^{-2} \Rightarrow$ " " g: $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$

Dimensionsmatrix: ($K\times N = 3\times 5$) enthält die Dimensionsvektoren der Parameter von f, d.h. von l, v, ρ, ν, g

$$A := \begin{array}{c} \\ L \\ M \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} l & v & \rho & \nu & g \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$$

Gleichungssystem: Bestimme $0 \neq \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_5)^T \in \mathbb{R}^5$ (da $N=5$) mit

$$A\cdot\alpha = 0 \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{da } K=3)$$

Lösung: Die Matrix A hat Rang 3, d.h. $r := \text{rang}(A) = 3$, somit besitzt das Gleichungssystem genau $N - r = 5-3 = 2 =: p$ linear unabhängige Lösungen $\alpha \in \mathbb{R}^5$. Diese lauten

$$\alpha^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \alpha^{(2)} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Π-Faktoren (dimensionslose Parameter Π_i):

tritt bei sämtlichen Strömungsvorgängen auf

$$\Pi_1 := l^{\alpha_1^{(1)}}\cdot v^{\alpha_2^{(1)}}\cdot \rho^{\alpha_3^{(1)}}\cdot \nu^{\alpha_4^{(1)}}\cdot g^{\alpha_5^{(1)}} = \frac{l\cdot v}{\nu} = Re \quad (\text{Reynolds-Zahl})$$

$$\Pi_2 := l^{\alpha_1^{(2)}}\cdot v^{\alpha_2^{(2)}}\cdot \rho^{\alpha_3^{(2)}}\cdot \nu^{\alpha_4^{(2)}}\cdot g^{\alpha_5^{(2)}} = \frac{v}{\sqrt{l\cdot g}} = Fr \quad (\text{Froude-Zahl})$$

tritt bei Strömungsvorgängen auf, bei denen die freie Oberfläche des Fluids Einfluss nimmt (z.B. durch Oberflächenwellenbildung)

Dimensionsvektor von P:

$$a = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$$

Gleichungssystem: Bestimme $0 \neq \beta = (\beta_1, \dots, \beta_5)^T \in \mathbb{R}^5$ (da $N=5$) mit

$$A \cdot \beta = -a$$

Lösung:

$$\beta = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Wähle $c_1 = c_2 = 0$, so gilt

$$\beta = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dimensionslose Unbekannte:

$$\Pi := P \cdot l^{\beta_1} \cdot v^{\beta_2} \cdot \rho^{\beta_3} \cdot \nu^{\beta_4} \cdot g^{\beta_5} = \frac{P}{l^2 \cdot v^3 \cdot \rho}$$

Nach dem Buckinghamschen π-Theorem gilt: „Es existiert eine von den dimensionslosen Parametern π_i abhängige Funktion G mit $\pi = G(\pi_1, \dots, \pi_p)$, wobei $p = N - r$ gilt." D.h.

$$\frac{P}{l^2 \cdot v^3 \cdot \rho} = \pi \stackrel{!}{=} G(\pi_1, \pi_2) = G(Re, Fr)$$