Aufgabe 8 (Strömungsverhalten eines Schiffes – Reynolds-Zahl und Froude-Zahl)

Es bezeichne:

$F\,[MLT^{-2}]$: Strömungswiderstand in Fahrtrichtung (Kraft)
$l\,[L]$: Schiffslänge
$b\,[L]$: Schiffsbreite
$t\,[L]$: Tiefgang des Schiffes
$v\,[LT^{-1}]$: Geschwindigkeit des Schiffes
$g\,[LT^{-2}]$: Erdbeschleunigung
$\varrho\,[L^{-3}M]$: Wasserdichte
$\mu\,[ML^{-1}T^{-1}]$: dynamische Viskosität (Zähigkeit) des Wassers

Dimensionsanalyse

Annahme: (Argumente von f sind $N=7$)

$$F = f(v, g, \varrho, \mu, l, b, t)$$

Dimensionen: $\{L, M, T\}$ ($K=3$ Grunddimensionen)

$[F] = MLT^{-2} = L^1M^1T^{-2}$ $\Rightarrow$ Dimensionsvektor von F : $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$
$[v] = LT^{-1} = L^1M^0T^{-1}$ $\Rightarrow$ " " v : $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$
$[g] = LT^{-2} = L^1M^0T^{-2}$ $\Rightarrow$ " " g : $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$
$[\varrho] = L^{-3}M = L^{-3}M^1T^0$ $\Rightarrow$ " " ϱ : $\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$
$[\mu] = ML^{-1}T^{-1} = L^{-1}M^1T^{-1}$ $\Rightarrow$ " " μ : $\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$
$[l] = L = L^1M^0T^0$ $\Rightarrow$ " " l : $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
$[b] = L = L^1M^0T^0$ $\Rightarrow$ " " b : $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
$[t] = L = L^1M^0T^0$ $\Rightarrow$ " " t : $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Dimensionsmatrix: ($K \times N = 3 \times 7$) enthält die Dimensionsvektoren der dimensionslosen Parameter von f, also von $v, g, \varrho, \mu, l, b, t$

$$A := \begin{array}{c} \\ L \\ M \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v & g & \varrho & \mu & l & b & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{3\times 7}$$

Gleichungssystem: Bestimme $0 \neq \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_7)^T \in \mathbb{R}^7$ (da $N=7$) mit

$$A \cdot \alpha = 0 \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{da } K=3)$$

Lösung: Die Matrix A hat den Rang 3, d.h. $r := \operatorname{rang}(A) = 3$, somit besitzt das Gleichungssystem genau $N - r = 7-3 = 4 =: p$ linear unabhängige Lösungen $\alpha \in \mathbb{R}^7$. Diese lauten

$$\alpha^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \alpha^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad \alpha^{(3)} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \alpha^{(4)} = \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\\0\\0\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$$

π – Faktoren (dimensionslose Parameter π_i)

$$\pi_1 := v^{\alpha_1^{(1)}} \cdot g^{\alpha_2^{(1)}} \cdot \rho^{\alpha_3^{(1)}} \cdot \mu^{\alpha_4^{(1)}} \cdot l^{\alpha_5^{(1)}} \cdot b^{\alpha_6^{(1)}} \cdot t^{\alpha_7^{(1)}} = \frac{l}{b}$$

$$\pi_2 := v^{\alpha_1^{(2)}} \cdot g^{\alpha_2^{(2)}} \cdot \rho^{\alpha_3^{(2)}} \cdot \mu^{\alpha_4^{(2)}} \cdot l^{\alpha_5^{(2)}} \cdot b^{\alpha_6^{(2)}} \cdot t^{\alpha_7^{(2)}} = \frac{t}{b}$$

tritt bei sämtlichen Strömungsvorgängen auf

$$\pi_3 := v^{\alpha_1^{(3)}} \cdot g^{\alpha_2^{(3)}} \cdot \rho^{\alpha_3^{(3)}} \cdot \mu^{\alpha_4^{(3)}} \cdot l^{\alpha_5^{(3)}} \cdot b^{\alpha_6^{(3)}} \cdot t^{\alpha_7^{(3)}} = \frac{v \cdot \rho \cdot b}{\mu} = Re \text{ (Reynolds-Zahl)}$$

$$\pi_4 := v^{\alpha_1^{(4)}} \cdot g^{\alpha_2^{(4)}} \cdot \rho^{\alpha_3^{(4)}} \cdot \mu^{\alpha_4^{(4)}} \cdot l^{\alpha_5^{(4)}} \cdot b^{\alpha_6^{(4)}} \cdot t^{\alpha_7^{(4)}} = \frac{v}{\sqrt{g \cdot b}} = Fr \text{ (Froude-Zahl)}$$

tritt bei Strömungsvorgängen auf, bei denen die freie Oberfläche des Fluids Einfluss nimmt (z.B. durch Oberflächenwellenbildung)

Dimensionsvektor von F:

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem: Bestimme $0 \neq \beta = (\beta_1, \dots, \beta_7)^T \in \mathbb{R}^7$ (da $N = 7$) mit

$$A \cdot \beta = -a$$

Lösung:

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\alpha^{(1)}} + c_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\alpha^{(2)}} + c_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\alpha^{(3)}} + c_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\alpha^{(4)}}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Wähle $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$, so gilt

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dimensionslose Unbekannte:

$$\pi := F \cdot v^{\beta_1} \cdot g^{\beta_2} \cdot \rho^{\beta_3} \cdot \mu^{\beta_4} \cdot l^{\beta_5} \cdot b^{\beta_6} \cdot t^{\beta_7} = \frac{F}{g \cdot \rho \cdot l \cdot b \cdot t}$$

Nach dem Buckinghamschen π-Theorem gilt: „Es existiert eine von den dimensionslosen Parametern π_i abhängige Funktion G mit $\pi = G(\pi_1, \dots, \pi_p)$, wobei $p = N - r$ gilt." D.h.

$$\frac{F}{g \cdot \rho \cdot l \cdot b \cdot t} = \pi \overset{!}{=} G(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$$

also

$$F = g \cdot \rho \cdot l \cdot b \cdot t \cdot G(\pi_1, \pi_2, \underset{Re}{\underset{\parallel}{\pi_3}}, \underset{Fr}{\underset{\parallel}{\pi_4}})$$

Reynolds-Zahl: $Re := \dfrac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Zähigkeitskräfte}} = \dfrac{v \cdot \rho \cdot L}{\mu} = \dfrac{v \cdot L}{\nu}$, ν: Kinematische Viskosität

Froude-Zahl: $Fr := \dfrac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Schwere Kräfte}} = \dfrac{v}{\sqrt{g \cdot L}}$

L: charakteristische Länge