## Aufgabe 9 (Wärmeleitung in einem Stab)

Es bezeichne:

| | | |
|---|---|---|
| $u\,[\Theta]$ | : | Temperatur an einem beliebigen Punkt des Stabes |
| $x\,[L]$ | : | Abstand entlang des Stabes zwischen der Wärmepunktquelle & dem Temp.messpunkt |
| $t\,[T]$ | : | verstrichene Zeit seit dem Beginn der Erwärmung |
| $\rho\,[ML^{-3}]$ | : | Massendichte des Stabes |
| $c\,[L^2T^{-2}\Theta^{-1}]$ | : | Wärmekapazität des Stabes |
| $K\,[LMT^{-3}\Theta^{-1}]$ | : | Wärmeleitfähigkeit des Stabes |
| $Q\,[MT^{-2}]$ | : | Kraft der Hitzequelle gemessen in Energieeinheiten pro (Längeneinheiten)$^2$. |

**Dimensionsanalyse:**

Annahme: (Argumente von $f$ sind $N=6$ Parameter)

$$u = f(x, t, \rho, c, K, Q)$$

Dimensionen: $\{L, M, T, \Theta\}$ ($K=4$ Grunddimensionen)

$$[u] = \Theta = L^0 M^0 T^0 \Theta^1 \implies \text{Dimensionsvektor von } u: \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$[x] = L = L^1 M^0 T^0 \Theta^0 \implies \text{" } x: \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$[t] = T = L^0 M^0 T^1 \Theta^0 \implies \text{" } t: \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$[\rho] = ML^{-3} = L^{-3} M^1 T^0 \Theta^0 \implies \text{" } \rho: \begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$[c] = L^2T^{-2}\Theta^{-1} = L^2 M^0 T^{-2} \Theta^{-1} \implies \text{" } c: \begin{pmatrix}2\\0\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$[K] = LMT^{-3}\Theta^{-1} = L^1 M^1 T^{-3} \Theta^{-1} \implies \text{" } K: \begin{pmatrix}1\\1\\-3\\-1\end{pmatrix}$$

$$[Q] = MT^{-2} = L^0 M^1 T^{-2} \Theta^0 \implies \text{" } Q: \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

Dimensionsmatrix: ($K \times N = 4 \times 6$) enthält die Dimensionsvektoren der Parameter von $f$, d.h. von $x, t, \rho, c, K, Q$:

$$A := \begin{array}{c} \\ L \\ M \\ T \\ \Theta \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & t & \rho & c & K & Q \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{4\times 6}$$

Gleichungssystem: Bestimme $0 \neq \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_6)^T \in \mathbb{R}^6$ (da $N=6$) mit

$$A \cdot \alpha = 0 \in \mathbb{R}^4 \quad (\text{da } K=4)$$

Lösung: Die Matrix $A$ hat Rang 4, d.h. $r := \text{rang}(A) = 4$, somit besitzt das Gleichungssystem genau $N - r = 6 - 4 = 2 =: p$ linear unabhängige Lösungen $\alpha \in \mathbb{R}^6$. Diese lauten

$$\alpha^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\\-2\\1\end{pmatrix}, \quad \alpha^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\3\\-3\\2\end{pmatrix}$$

$\Pi$-Faktoren (dimensionslose Parameter $\Pi_i$):

$$\Pi_1 := x^{\alpha_1^{(1)}} \cdot t^{\alpha_2^{(1)}} \cdot \rho^{\alpha_3^{(1)}} \cdot c^{\alpha_4^{(1)}} \cdot K^{\alpha_5^{(1)}} \cdot Q^{\alpha_6^{(1)}} = \frac{x \cdot \rho \cdot c^2 \cdot Q}{K^2}$$

$$\Pi_2 := x^{\alpha_1^{(2)}} \cdot t^{\alpha_2^{(2)}} \cdot \rho^{\alpha_3^{(2)}} \cdot c^{\alpha_4^{(2)}} \cdot K^{\alpha_5^{(2)}} \cdot Q^{\alpha_6^{(2)}} = \frac{t \cdot \rho \cdot c^3 \cdot Q^2}{K^3}$$

Dimensionsvektor von $u$:

$$a := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem: Bestimme $0 \neq \beta = (\beta_1, \dots, \beta_6)^T \in \mathbb{R}^6$ (da $N = 6$) mit

$$A \cdot \beta = -a$$

Lösung:

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\alpha^{(1)}} + c_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=\alpha^{(2)}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Setzen wir $c_1 = c_2 = 0$, so gilt

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Dimensionslose Unbekannte:

$$\pi := u \cdot x^{\beta_1} \cdot t^{\beta_2} \cdot \rho^{\beta_3} \cdot c^{\beta_4} \cdot K^{\beta_5} \cdot Q^{\beta_6} = u \cdot \frac{c \cdot K^2}{Q^2}$$

Nach dem Buckinghamschen $\pi$-Theorem gilt: „Es existiert eine von den dimensionslosen Parametern $\pi_i$ abhängige Funktion $G$ mit $\pi = G(\pi_1, \dots, \pi_p)$, wobei $p = N - r$ gilt." D.h.

$$u \cdot \frac{c \cdot K^2}{Q^2} = \pi \overset{!}{=} G(\pi_1, \pi_2)$$

also

$$u = c^{-1} K^{-2} Q^2 \cdot G(\pi_1, \pi_2)$$