Aufgabe 10: (Radioaktiver Zerfall)

Es bezeichne:

$u(t)\,[N]$: Anzahl der zur Zeit t noch nicht zerfallenen instabilen Atomkerne

$u_0\,[N]$: Anzahl der instabilen Atomkerne zum Anfangszeitpunkt t_0

$t_0\,[T]$: Anfangszeitpunkt

$t\,[T]$: Zeit

$K\,[T^{-1}]$: Zerfallsrate $\left(K = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}\right.$, $T_{1/2}\,[T]$: Halbwertszeit der radioaktiven Substanzprobe$\left.\right)$

Anfangswertaufgabe:

$$u'(t) = -K\cdot u(t), \quad u(t_0) = u_0.$$

Dimensionsanalyse

Dimensionen: $\{N, T\}$ ($K=2$ Grunddimensionen, $N=3$ Parameter)

Parameter: $[u_0] = N = N^1T^0$ $\Rightarrow$ Dimensionsvektor von u_0 : $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$[t_0] = T = N^0T^1$ $\Rightarrow$ " " t_0 : $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$[K] = T^{-1} = N^0T^{-1}$ $\Rightarrow$ " " K : $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

Variablen: $[u(t)] = N = N^1T^0$ $\Rightarrow$ " " $u(t)$: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$[t] = T = N^0T^1$ $\Rightarrow$ " " t : $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Dimensionsmatrix: ($K\times N = 2\times 3$) enthält die Dimensionsvektoren der Parameter, d.h. von u_0, t_0, K:

$$A := \begin{array}{c} \\ N \\ T \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_0 & t_0 & K \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

Alternative Herleitung der Dimensionsmatrix:

Der Parameter (Produktansatz)

$$\pi := u_0^{\alpha_1}\cdot t_0^{\alpha_2}\cdot K^{\alpha_3}, \quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$$

besitzt die Dimension

$$[\pi] = [u_0]^{\alpha_1}\cdot[t_0]^{\alpha_2}\cdot[K]^{\alpha_3} = N^{\alpha_1}\cdot T^{\alpha_2-\alpha_3} \overset{!}{=} N^{b_1}\cdot T^{b_2}, \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R},$$

falls (Faktoren- & Exponentenvergleich)

$$\alpha_1 = b_1$$
$$\alpha_2 - \alpha_3 = b_2$$

also

$$A\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = b, \quad A\in\mathbb{R}^{2,3}, \alpha\in\mathbb{R}^3, b\in\mathbb{R}^2.$$

a) Dimensionslose Parameter π_i: ($p=1$ dimensionslose Parameter)

$$[\pi] \overset{!}{=} 1 \Leftrightarrow A\alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} \in \left\{ c\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, c\in\mathbb{R} \right\}$$

Für $c=1$ erhalten wir $\alpha^T = (0,1,1)^T$ und somit

$$\pi_1 = u_0^{\alpha_1}\cdot t_0^{\alpha_2}\cdot K^{\alpha_3} = t_0\cdot K$$

Beachte: Die Matrix A hat den Rang 2, d.h. $r := \text{rang}(A) = 2$, somit besitzt das homogene Lineare Gleichungssystem genau $p := N - r = 3-2 = 1$ linear unabhängige Lösungen $\alpha\in\mathbb{R}^3$.

Entdimensionalisierung: (Variante 1)

b) Intrinsische Referenzgröße $\hat{u}$ für $u(t)$:   Dimensionsvektor von $u(t)$

$$[\pi] \overset{!}{=} [u(t)] \iff A\cdot\alpha = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, c\in\mathbb{R}\right\}$$

Für $c=-1$ erhalten wir $\alpha^T = (1,0,0)^T$ und somit

$$\hat{u} = u_0^{\alpha_1}\cdot t_0^{\alpha_2}\cdot K^{\alpha_3} = u_0 .$$

c) Intrinsische Referenzgröße $\hat{t}$ für t: Dimensionsvektor von t

$$[\pi] = [t] \iff A\cdot\alpha = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + c\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, c\in\mathbb{R}\right\}$$

Für $c=-2$ erhalten wir $\alpha^T = (0,0,-1)^T$ und somit

$$\hat{t} = u_0^{\alpha_1}\cdot t_0^{\alpha_2}\cdot K^{\alpha_3} = K^{-1}.$$

Transformation der Anfangswertaufgabe: Für die Transformation

$$(\tau, v(\tau)) \overset{!}{=} T(t, u(t)) := \left(\frac{t}{\hat{t}}, \frac{u(t)}{\hat{u}}\right)$$

genauer

$$\tau = \frac{t}{\hat{t}}, \quad v(\tau) = \frac{u(t)}{\hat{u}} = \frac{u(\hat{t}\cdot\tau)}{\hat{u}}$$

gilt:

$$v'(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left[v(\tau)\right] = \frac{d}{d\tau}\left[\frac{u(\hat{t}\cdot\tau)}{\hat{u}}\right] \underset{(KR)}{=} \frac{\hat{t}}{\hat{u}}\cdot u'(\hat{t}\cdot\tau) \underset{u'=-Ku}{=} -\frac{\hat{t}\cdot K}{\hat{u}}\cdot u(\hat{t}\cdot\tau) \overset{v=\frac{u}{\hat{u}}}{=} -\hat{t}\cdot K\cdot v(\tau) \underset{\hat{t}=K^{-1}}{=} -v(\tau)$$

$$v(\tau_0) = \frac{u(\hat{t}\cdot\tau_0)}{\hat{u}} \underset{\tau_0 := \frac{t_0}{\hat{t}} = t_0\cdot K}{=} \frac{u(t_0)}{\hat{u}} = \frac{u_0}{\hat{u}} \underset{\hat{u}=u_0}{=} 1$$

Entdimensionalisierte Anfangswertaufgabe:

$$v'(\tau) = -v(\tau), \quad v(\tau_0) = 1, \qquad \tau_0 := t_0\cdot K = \pi_1$$

Lösung

$$v(\tau) = e^{-(\tau-\tau_0)}, \quad \tau \geq \tau_0$$

Rücktransformation

$$u(t) = \hat{u}\cdot v(\tau) = \hat{u}\cdot v\left(\frac{t}{\hat{t}}\right) = u_0\cdot v(t\cdot K) \underset{\tau_0 = t_0\cdot K}{=} u_0\cdot e^{-K(t-t_0)}, \quad t\geq t_0$$

Hinweis: (Populationsdynamik – Unbeschränktes exp. Wachstum)

Es bezeichne

$u(t)[N]$: Populationsgröße zur Zeit t
$u_0\,[N]$: Anfangspopulationsgröße zur Zeit t_0
$t_0\,[T]$: Anfangszeitpunkt
$t\,[T]$: Zeit
$p\,[T^{-1}]$: Wachstumsrate

Dann beschreibt die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = p\cdot u(t), \quad u(t_0) = u_0$$

das unbeschränkte Wachstumsverhalten in der Populationsdynamik.

$p > 0$: Populationsgröße nimmt exponentiell zu
$p = 0$: Populationsgröße bleibt konstant u_0
$p < 0$: Populationsgröße nimmt exponentiell ab