## Aufgabe 11: (Populationsdynamik – Beschränktes Wachstum)

Es bezeichne:

$u(t)\,[N]$ : Populationsgröße zur Zeit $t$
$u_0\,[N]$ : Anfangspopulation
$u_{max}\,[N]$ : maximale Populationsgröße
$q\,[N^{-1}T^{-1}]$ : Wachstumsrate
$t\,[T]$ : Zeit

Anfangswertaufgabe:

$$u'(t) = q u_{max} u(t) - q u^2(t), \quad u(0) = u_0$$

**Dimensionsanalyse:**

Dimensionen: $\{N, T\}$ ($K=2$ Grunddimensionen, $N=3$ Parameter)

Parameter: $[u_0] = N = N^1 T^0 \Rightarrow$ Dimensionsvektor von $u_0$: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$[u_{max}] = N = N^1 T^0 \Rightarrow$ " " $u_{max}$: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$[q] = N^{-1}T^{-1} = N^{-1}T^{-1} \Rightarrow$ " " $q$: $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

Variablen: $[u(t)] = N = N^1 T^0 \Rightarrow$ " " $u(t)$: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$[t] = T = N^0 T^1 \Rightarrow$ " " $t$: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Dimensionsmatrix: ($K \times N = 2\times 3$) enthält die Dimensionsvektoren der Parameter, d.h. von $u_0, u_{max}, q$

$$A := \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} u_0 & u_{max} & q \end{array} \\ \begin{array}{c} N \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

Dimensionslose Parameter $\pi_i$: ($p=1$ dimensionslose Parameter)

$$[\pi] \overset{!}{=} 1 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} \in \left\{ c\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, c\in\mathbb{R}\right\}$$

Für $c=1$ erhalten wir $\alpha^T = (1,-1,0)^T$ und somit

$$\pi_1 = u_0^{\alpha_1}\cdot u_{max}^{\alpha_2}\cdot q^{\alpha_3} = \frac{u_0}{u_{max}}.$$

**Entdimensionalisierung:** (Variante 2)

Die Transformation

$$(\tau, v(\tau)) \overset{!}{=} T(t, u(t)) := \left(\frac{t}{\hat{t}}, \frac{u(t)}{\hat{u}}\right),$$

also

$$\tau = \frac{t}{\hat{t}}, \quad v(\tau) = \frac{u(t)}{\hat{u}} = \frac{u(\hat{t}\cdot\tau)}{\hat{u}}$$

mit noch zu bestimmenden intrinsischen Referenzgrößen $\underset{\hat{t}(u_0,u_{max},q)}{\hat{t}}, \underset{\hat{u}(u_0,u_{max},q)}{\hat{u}}$, liefert

$$v'(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left[v(\tau)\right] = \frac{d}{d\tau}\left[\frac{u(\hat{t}\cdot\tau)}{\hat{u}}\right] \underset{(KR)}{=} \frac{\hat{t}}{\hat{u}} u'(\hat{t}\cdot\tau) \underset{\uparrow}{=} \frac{\hat{t}}{\hat{u}}\left[q u_{max}\cdot u(\hat{t}\tau) - q u^2(\hat{t}\tau)\right]$$

$$= \frac{\hat{t}}{\hat{u}}\left[q u_{max}\hat{u}\cdot v(\tau) - q\hat{u}^2\cdot v^2(\tau)\right] \overset{u' = q u_{max} u - q u^2}{=} \hat{t} q u_{max}\cdot v(\tau) - q\hat{t}\hat{u}\, v^2(\tau)$$

$$v(0) = \frac{u(\hat{t}\cdot 0)}{\hat{u}} = \frac{u_0}{\hat{u}}$$

und somit die transformierte Anfangswertaufgabe

$$v'(\tau) = \boxed{\hat{t} q u_{max}}\cdot v(\tau) - \boxed{\hat{t}\hat{u} q}\cdot v^2(\tau), \quad v(0) = \boxed{\frac{u_0}{\hat{u}}}.$$

Die intrinsischen Referenzgrößen $\hat{t}$ und $\hat{u}$ werden nun so gewählt, dass möglichst viele der Koeffizienten

$$\hat{t}\, q\, u_{max}, \quad \hat{t}\hat{u}q, \quad \frac{u_0}{\hat{u}}$$

gleich 1 sind. Es gibt 3 Möglichkeiten (für die Skalierung):

(a): $\hat{t} q u_{max} = 1, \quad \hat{t}\hat{u}q = 1$

$$\Rightarrow \hat{t} = \frac{1}{q u_{max}}, \quad \hat{u} = u_{max} \quad \left(\Rightarrow \frac{u_0}{\hat{u}} = \frac{u_0}{u_{max}} = \Pi_1\right)$$

$$\Rightarrow v'(\tau) = v(\tau) - v^2(\tau), \quad v(0) = \Pi_1$$

(b): $\hat{t} q u_{max} = 1, \quad \frac{u_0}{\hat{u}} = 1$

$$\Rightarrow \hat{t} = \frac{1}{q u_{max}}, \quad \hat{u} = u_0 \quad \left(\Rightarrow \hat{t}\hat{u}q = \frac{u_0}{u_{max}} = \Pi_1\right)$$

$$\Rightarrow v'(\tau) = v(\tau) - \Pi_1 \cdot v^2(\tau), \quad v(0) = 1$$

(c): $\hat{t}\hat{u}q = 1, \quad \frac{u_0}{\hat{u}} = 1$

$$\Rightarrow \hat{u} = u_0, \quad \hat{t} = \frac{1}{q u_0} \quad \left(\Rightarrow \hat{t} q u_{max} = \frac{u_{max}}{u_0} = \Pi_1^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow v'(\tau) = \Pi_1^{-1} \cdot v(\tau) - v^2(\tau), \quad v(0) = 1$$

Somit lauten die entdimensionalisierten Anfangswertaufgaben

$$\begin{aligned}
(a) &: \; v'(\tau) = v(\tau) - v^2(\tau), \quad v(0) = \Pi_1 \\
(b) &: \; v'(\tau) = v(\tau) - \Pi_1 v^2(\tau), \quad v(0) = 1 \\
(c) &: \; v'(\tau) = \Pi_1^{-1} \cdot v(\tau) - v^2(\tau), \quad v(0) = 1
\end{aligned}$$

Modellvereinfachung: Unter der Annahme $u_0 \ll u_{max}$ gilt $0 < \Pi_1 \ll 1$. Wir analysieren nun, ob wir $\Pi_1$ in (a) – (c) vernachlässigen können (d.h. $\Pi_1 = 0$ setzen dürfen)

(a): $v'(\tau) = v(\tau) - v^2(\tau), \quad v(0) = 0$

$\Rightarrow v(\tau) = 0 \quad \forall \tau \geq 0$

$\Rightarrow$ Lösung unbrauchbar!

Grund: Wegen $0 < u_0 \ll u_{max}$ ist die Skala „$\hat{t}$ viel zu klein" und „$\hat{u}$ viel zu groß"

(b): $v'(\tau) = v(\tau), \quad v(0) = 1$

$\Rightarrow v(\tau) = \exp(\tau) \quad \forall \tau \geq 0$

Rücktransformation

$$u(t) = \hat{u} \cdot v(\tau) = \hat{u} \cdot v\left(\frac{t}{\hat{t}}\right) = u_0 \cdot v(q \cdot u_{max} \cdot t) = u_0 \cdot \exp(q \cdot u_{max} \cdot t).$$

(c): $\Pi_1 \cdot v'(\tau) = v(\tau) - \Pi_1 \cdot v^2(\tau), \quad v(0) = 1$

$\overset{\Pi_1 = 0}{\Longrightarrow} v(\tau) = 0, \quad v(0) = 1$

$\Rightarrow$ es existiert keine Lösung (Problem nicht gut gestellt)