Aufgabe 12: (Gedämpfte Federschwingung eines Körpers)

Es bezeichne:

$m[M]$	:	Masse des Körpers
$R[L]$	:	Amplitude der Anregung
$K[MT^{-2}]$	:	Federkonstante
$r[MT^{-1}]$	:	Dämpfungsfaktor
$\omega_0[T^{-1}]$	:	Anregungsfrequenz der Schwingung
$x(t)[L]$	:	Position des Pendels
$t\,[T]$	:	Zeit

Anfangswertaufgabe:

$$m x''(t) + r x'(t) + K x(t) = -m R \omega_0^2 \sin(\omega_0 t), \quad x(0)=0, \quad x'(0)=0$$

Dimensionsanalyse:

Dimensionen: $\{L, M, T\}$ ($K=3$ Grunddimensionen, $N=5$ Parameter)

Parameter:
$[m] = M = L^0 M^1 T^0 \Rightarrow$ Dimensionsvektor von m : $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$[R] = L = L^1 M^0 T^0 \Rightarrow$ " R : $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$[K] = MT^{-2} = L^0 M^1 T^{-2} \Rightarrow$ " K : $\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$

$[r] = MT^{-1} = L^0 M^1 T^{-1} \Rightarrow$ " r : $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$[\omega_0] = T^{-1} = L^0 M^0 T^{-1} \Rightarrow$ " ω_0 : $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

Variablen:
$[x(t)] = L = L^1 M^0 T^0 \Rightarrow$ " $x(t)$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$[t] = T = L^0 M^0 T^1 \Rightarrow$ " t : $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Dimensionsmatrix: ($K\times N = 3\times 5$) enthält die Dimensionsvektoren der Parameter, d.h. von m, R, K, r, ω_0

$$A = \begin{array}{c} \\ L \\ M \\ T \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} m & R & K & r & \omega_0 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$$

Dimensionslose Parameter π_i: ($p=2$ dimensionslose Parameter), $\pi := m^{\alpha_1} \cdot R^{\alpha_2} \cdot K^{\alpha_3} \cdot r^{\alpha_4} \cdot \omega_0^{\alpha_5}$

$$[\pi] \overset{!}{=} 1 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_5\end{pmatrix} \in \left\{ c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\2\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\2\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Für $(c_1, c_2) = (0, -1)$ bzw. $(c_1, c_2) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ erhalten wir

$$\pi_1 = \frac{K \cdot m}{r^2}, \qquad \pi_2 = \frac{m \cdot \omega_0}{r}$$

Entdimensionalisierung (Variante 2)

Die Transformation

$$(\tau, y(\tau)) \overset{!}{=} T(t, x(t)) := \left(\frac{t}{\hat{t}}, \frac{x(t)}{\hat{x}}\right),$$

also

$$\tau = \frac{t}{\hat{t}}, \quad y(\tau) = \frac{x(t)}{\hat{t}} = \frac{x(\hat{t}\cdot\tau)}{\hat{x}}$$

mit noch zu bestimmenden intrinsischen Referenzgrößen $\hat{t} = \hat{t}(m, R, K, r, \omega_0)$, $\hat{x} = \hat{x}(m, R, K, r, \omega_0)$ liefert

$$y'(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left[y(\tau)\right] = \frac{d}{d\tau}\left[\frac{\hat{x}(\hat{t}\cdot\tau)}{\hat{x}}\right] = \frac{\hat{t}}{\hat{x}} \cdot x'(\hat{t}\cdot\tau)$$

somit

$$y''(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left[y'(\tau)\right] = \frac{d}{d\tau}\left[\frac{\hat{f}}{\hat{x}}\cdot x'(\hat{f}\cdot\tau)\right] = \frac{\hat{f}^2}{\hat{x}\cdot m}\cdot m\cdot x''(\hat{f}\cdot\tau)$$

$$= \frac{\hat{f}^2}{\hat{x}\cdot m}\cdot\left[-r\cdot x'(\hat{f}\cdot\tau) - K\cdot x(\hat{f}\cdot\tau) - mR\omega_0^2\sin(\omega_0\cdot\hat{f}\cdot\tau)\right]$$

$$= \frac{\hat{f}^2}{\hat{x}\cdot m}\cdot\left[-r\cdot\frac{\hat{x}}{\hat{f}}\cdot y'(\tau) - K\cdot\hat{x}\cdot y(\tau) - mR\omega_0^2\sin(\omega_0\cdot\hat{f}\cdot\tau)\right]$$

$$= -\frac{r\cdot\hat{f}}{m}\cdot y'(\tau) - \frac{K\hat{f}^2}{m}\cdot y(\tau) - \frac{\hat{f}^2 R\omega_0^2}{\hat{x}}\cdot\sin(\omega_0\cdot\hat{f}\cdot\tau)$$

$$y(0) = \frac{x(\hat{f}\cdot 0)}{\hat{x}} = 0$$

$$y'(0) = \frac{\hat{f}}{\hat{x}}\cdot x'(\hat{f}\cdot 0) = 0$$

und folglich die transformierte Anfangswertaufgabe

$$y''(\tau) + \boxed{\frac{r\cdot\hat{f}}{m}}\cdot y'(\tau) + \boxed{\frac{K\cdot\hat{f}^2}{m}}\cdot y(\tau) = -\boxed{\frac{\hat{f}\cdot R\cdot\omega_0^2}{\hat{x}}}\cdot\sin(\boxed{\omega_0\cdot\hat{f}}\cdot\tau)\quad, y(0)=0, y'(0)=0$$

Die intrinsischen Referenzgrößen $\hat{f}$, $\hat{x}$ werden nun so gewählt, dass möglichst viele der Koeffizient

$$\frac{r\cdot\hat{f}}{m},\quad\frac{K\cdot\hat{f}^2}{m},\quad\frac{\hat{f}\cdot R\cdot\omega_0^2}{\hat{x}},\quad\omega_0\cdot\hat{f}$$

gleich 1 sind. Es gibt 3 Möglichkeiten (für die Skalierung):

(a): $\frac{r\cdot\hat{f}}{m} = 1$, $\frac{\hat{f}\cdot R\cdot\omega_0^2}{\hat{x}} = 1$

$$\Rightarrow \hat{f} = \frac{m}{r},\quad \hat{x} = \frac{m\cdot R\cdot\omega_0^2}{r}\quad\left(\Rightarrow \frac{K\cdot\hat{f}^2}{m} = \overbrace{\frac{Km}{r^2}}^{\Pi_1},\quad \omega_0\cdot\hat{f} = \overbrace{\frac{m\,\omega_0}{r}}^{\Pi_2}\right)$$

$$\Rightarrow y''(\tau) + y'(\tau) + \Pi_1\cdot y(\tau) = -\sin(\Pi_2\cdot\tau),\quad y(0)=0,\ y'(0)=0$$

(b): $\frac{K\cdot\hat{f}^2}{m} = 1$, $\frac{\hat{f}\cdot R\cdot\omega_0^2}{\hat{x}} = 1$

$$\Rightarrow \hat{f} = \sqrt{\frac{m}{K}},\quad \hat{x} = R\cdot\omega_0^2\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}\quad\left(\Rightarrow \frac{r\cdot\hat{f}}{m} = \overbrace{\sqrt{\frac{r^2}{K\cdot m}}}^{\Pi_1^{-\frac{1}{2}}},\quad \omega_0\hat{f} = \overbrace{\sqrt{\frac{m\cdot\omega_0^2}{K}}}^{\Pi_2\cdot\Pi_1^{-\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\Rightarrow y''(\tau) + \Pi_1^{-\frac{1}{2}}\cdot y'(\tau) + y(\tau) = -\sin(\Pi_1^{-\frac{1}{2}}\cdot\Pi_2\cdot\tau),\quad y(0)=0,\ y'(0)=0$$

(c): $\omega_0\hat{f} = 1$, $\frac{\hat{f}\cdot R\cdot\omega_0^2}{\hat{x}} = 1$

$$\Rightarrow \hat{f} = \frac{1}{\omega_0},\quad \hat{x} = \omega_0\cdot R\quad\left(\Rightarrow \frac{r\cdot\hat{f}}{m} = \overbrace{\frac{r}{m\cdot\omega_0}}^{\Pi_2^{-1}},\quad \frac{K\cdot\hat{f}^2}{m} = \overbrace{\frac{K}{m\cdot\omega_0^2}}^{\Pi_1\cdot\Pi_2^{-2}}\right)$$

$$\Rightarrow y''(\tau) + \Pi_2^{-1}\cdot y'(\tau) + \Pi_1\cdot\Pi_2^{-2}\cdot y(\tau) = -\sin(\tau).$$

Somit lauten die entdimensionalisierten Anfangswertaufgaben

(a): $y''(\tau) + y'(\tau) + \Pi_1\cdot y(\tau) = -\sin(\Pi_2\cdot\tau)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

(b): $y''(\tau) + \Pi_1^{-\frac{1}{2}}\cdot y'(\tau) + y(\tau) = -\sin(\Pi_1^{-\frac{1}{2}}\cdot\Pi_2\cdot\tau)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

(c): $y''(\tau) + \Pi_2^{-1}\cdot y'(\tau) + \Pi_1\cdot\Pi_2^{-2}\cdot y(\tau) = -\sin(\tau)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$