Aufgabe 13: (Senkrechter Wurf und freier Fall – mit Luftwiderstand)

Es bezeichne:

$m\,[M]$	:	Masse des Körpers
$g\,[LT^{-2}]$	:	Erdbeschleunigung
$\beta_1\,[MT^{-1}]$	:	Reibungskoeffizient (für Stokes-Reibung)
$\beta_2\,[ML^{-1}]$	:	Reibungskoeffizient (für Newton-Reibung)
$x(t)\,[L]$	:	Höhe des Körpers zur Zeit t
$t\,[T]$	:	Zeit
$t_0\,[T]$	:	Anfangszeitpunkt
$v_0\,[LT^{-1}]$	:	Abwurfgeschwindigkeit

Anfangswertaufgaben:

(a) $m\cdot x''(t) = -g\cdot m - \beta_1\cdot x'(t)$, $x(t_0)=0$, $x'(t_0)=v_0$

(b) $m\cdot x''(t) = -g\cdot m - \beta_2\cdot|x'(t)|\cdot x'(t)$, $x(t_0)=0$, $x'(t_0)=v_0$

Dimensionsanalyse:

Dimensionen: $\{L, M, T\}$ ($K=3$ Grunddimensionen, $N=5$ Parameter)

Parameter:

$[m] = M = L^0 M^1 T^0 \Rightarrow$ Dimensionsvektor von m: $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$[g] = LT^{-2} = L^1 M^0 T^{-2} \Rightarrow$ " " g: $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$

$[\beta_1] = MT^{-1} = L^0 M^1 T^{-1} \Rightarrow$ " " β_1: $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$[\beta_2] = ML^{-1} = L^{-1} M^1 T^0 \Rightarrow$ " " β_2: $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$[t_0] = T = L^0 M^0 T^1 \Rightarrow$ " " t_0: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$[v_0] = LT^{-1} = L^1 M^0 T^{-1} \Rightarrow$ " " v_0: $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

Variablen:

$[x(t)] = L = L^1 M^0 T^0 \Rightarrow$ " " $x(t)$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$[t] = T = L^0 M^0 T^1 \Rightarrow$ " " t: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Dimensionsmatrix: ($K\times N = 3\times 5$) enthält die Dimensionsvektoren der Parameter

(a) $$A = \begin{array}{c} \\ L \\ M \\ T \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} m & g & t_0 & v_0 & \beta_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$$

(b) $$A = \begin{array}{c} \\ L \\ M \\ T \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} m & g & t_0 & v_0 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$$

Dimensionslose Parameter π_i: ($p=2$ dimensionslose Parameter) $\pi = m^{\alpha_1} g^{\alpha_2} t_0^{\alpha_3} v_0^{\alpha_4} \beta_i^{\alpha_5}$ $(i=1,2)$

(a) $$[\pi]=1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_5\end{pmatrix} \in \left\{ c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\-1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

Für $(c_1, c_2) = (-1, 0)$ bzw. $(c_1, c_2) = (-1, -1)$ erhalten wir

$$\pi_1 = \frac{t_0\cdot\beta_1}{m}, \quad \pi_2 = \frac{\beta_1\cdot v_0}{m\cdot g}$$

(b) $$[\pi]=1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_5\end{pmatrix} \in \left\{ c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

Für $(c_1, c_2) = (-1, 1)$ bzw. $(c_1, c_2) = (-1, -1)$ erhalten wir

$$\pi_1 = \frac{g\,t_0^2\,\beta_2}{m}, \quad \pi_2 = \frac{\beta_2 v_0^2}{m\cdot g}$$

Entdimensionalisierung: (Variante 2)

Die Transformation

$$(\tau, y(\tau)) = T(t, x(t)) := \left(\frac{t}{\hat{t}}, \frac{x(t)}{\hat{x}}\right),$$

also

$$\tau = \frac{t}{\hat{t}}, \quad y(\tau) = \frac{x(t)}{\hat{x}} = \frac{x(\hat{t}\cdot\tau)}{\hat{x}}$$

mit noch zu bestimmenden intrinsischen Referenzgrößen $\hat{t} = \hat{t}(m, g, t_0, v_0, \beta_i)$, $\hat{x} = \hat{x}(m, g, t_0, v_0, \beta_i)$, $i = 1,2$, liefert

$$y''(\tau) = \frac{d^2}{d\tau^2}\left[y(\tau)\right] = \frac{d^2}{d\tau^2}\left[\frac{x(\hat{t}\cdot\tau)}{\hat{x}}\right] = \frac{\hat{t}^2}{\hat{x}\cdot m}\cdot m x''(\hat{t}\cdot\tau)$$

$$= \begin{cases} \frac{\hat{t}^2}{\hat{x}\cdot m}\cdot\left[-g\cdot m - \beta_1 x'(\hat{t}\cdot\tau)\right] = \frac{\hat{t}^2}{\hat{x}\cdot m}\cdot\left[-g\cdot m - \beta_1\frac{\hat{x}}{\hat{t}}\cdot y'(\tau)\right] = -\frac{\hat{t}^2\cdot g}{\hat{x}} - \frac{\hat{t}\cdot\beta_1}{m}\cdot y'(\tau) & (a) \\ \frac{\hat{t}^2}{\hat{x}\cdot m}\left[-g\cdot m - \beta_2|x'(\hat{t}\tau)|x'(\hat{t}\tau)\right] \underset{\hat{x},\hat{t}>0}{\overset{}{=}} \frac{\hat{t}^2}{\hat{x}\cdot m}\left[-g\cdot m - \beta_2\frac{\hat{x}^2}{\hat{t}^2}\cdot|y'(\tau)|\cdot y'(\tau)\right] = -\frac{\hat{t}^2\cdot g}{\hat{x}} - \frac{\hat{x}\cdot\beta_2}{m}|y'(\tau)|y'(\tau) & (b) \end{cases}$$

$$y\left(\frac{t_0}{\hat{t}}\right) = \frac{x\left(\hat{t}\cdot\frac{t_0}{\hat{t}}\right)}{\hat{x}} = 0$$

$$y'\left(\frac{t_0}{\hat{t}}\right) = \frac{\hat{t}}{\hat{x}}\cdot x'\left(\hat{t}\cdot\frac{t_0}{\hat{t}}\right) = \frac{\hat{t}\cdot v_0}{\hat{x}}$$

und folglich die transformierten Anfangswertaufgaben

(a) $\quad y''(\tau) = -\boxed{\frac{\hat{t}^2\cdot g}{\hat{x}}} - \boxed{\frac{\hat{t}\cdot\beta_1}{m}}\cdot y'(\tau), \quad y\left(\boxed{\frac{t_0}{\hat{t}}}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{t_0}{\hat{t}}\right) = \boxed{\frac{\hat{t}\cdot v_0}{\hat{x}}}$

(b) $\quad y''(\tau) = -\boxed{\frac{\hat{t}^2\cdot g}{\hat{x}}} - \boxed{\frac{\hat{x}\cdot\beta_2}{m}}\cdot|y'(\tau)|\cdot y'(\tau), \quad y\left(\boxed{\frac{t_0}{\hat{t}}}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{t_0}{\hat{t}}\right) = \boxed{\frac{\hat{t}\, v_0}{\hat{x}}}$

Skalierung: Die intrinsischen Referenzgrößen $\hat{t}$, $\hat{x}$ werden nun so gewählt, dass möglichst viele der Koeffizienten

(a) $\quad \frac{\hat{t}^2\cdot g}{\hat{x}}, \quad \frac{\hat{t}\cdot\beta_1}{m}, \quad \frac{t_0}{\hat{t}}, \quad \frac{\hat{t}\cdot v_0}{\hat{x}}$

(b) $\quad \frac{\hat{t}^2\cdot g}{\hat{x}}, \quad \frac{\hat{x}\cdot\beta_2}{m}, \quad \frac{t_0}{\hat{t}}, \quad \frac{\hat{t}\cdot v_0}{\hat{x}}$

gleich 1 sind. Es gibt 5 (in (a)) bzw. 6 (in (b)) Möglichkeiten:

(a) (1): $\frac{\hat{t}^2\cdot g}{\hat{x}} = 1, \quad \frac{\hat{t}\cdot\beta_1}{m} = 1$

$$\Rightarrow \hat{t} = \frac{m}{\beta_1}, \quad \hat{x} = \frac{m^2\cdot g}{\beta_1^2} \quad \left(\Rightarrow \frac{t_0}{\hat{t}} = \frac{t_0\cdot\beta_1}{m} \overset{\Pi_1}{=}, \quad \frac{\hat{t}\cdot v_0}{\hat{x}} = \frac{\beta_1\cdot v_0}{m\cdot g} \overset{\Pi_2}{=}\right)$$

$$\Rightarrow y''(\tau) = -1 - y'(\tau), \quad y(\Pi_1) = 0, \quad y'(\Pi_1) = \Pi_2$$

(2): $\frac{\hat{t}^2\cdot g}{\hat{x}} = 1, \quad \frac{t_0}{\hat{t}} = 1$

$$\Rightarrow \hat{t} = t_0, \quad \hat{x} = t_0^2\cdot g \quad \left(\Rightarrow \frac{\hat{t}\cdot\beta_1}{m} = \frac{t_0\cdot\beta_1}{m} \overset{\Pi_1}{=}, \quad \frac{\hat{t}\cdot v_0}{\hat{x}} = \frac{v_0}{t_0\cdot g} \overset{\Pi_1^{-1}\Pi_2}{=}\right)$$

$$\Rightarrow y''(\tau) = -1 - \Pi_1 y'(\tau), \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = \Pi_1^{-1}\Pi_2$$

(3): $\frac{\hat{t}^2\cdot g}{\hat{x}} = 1, \quad \frac{\hat{t}\cdot v_0}{\hat{x}} = 1$

$$\Rightarrow \hat{t} = \frac{v_0}{g}, \quad \hat{x} = \frac{v_0^2}{g} \quad \left(\Rightarrow \frac{\hat{t}\cdot\beta_1}{m} = \frac{v_0\cdot\beta_1}{m\cdot g} \overset{\Pi_2}{=}, \quad \frac{t_0}{\hat{t}} = \frac{t_0\cdot g}{v_0} \overset{\Pi_1\cdot\Pi_2^{-1}}{=}\right)$$

$$\Rightarrow y''(\tau) = -1 - \Pi_2 y'(\tau), \quad y(\Pi_1\Pi_2^{-1}) = 0, \quad y'(\Pi_1\Pi_2^{-1}) = 1$$

(4): $\frac{\hat{t}\cdot\beta_1}{m}=1,\ \frac{\hat{t}\cdot v_0}{\hat{x}}=1$

$$\Rightarrow \hat{t}=\frac{m}{\beta_1},\ \hat{x}=\frac{m\cdot v_0}{\beta_1}\quad \left(\Rightarrow \frac{\hat{t}^2\cdot g}{\hat{x}}=\overset{\pi_2^{-1}}{\overset{\shortparallel}{\frac{m\cdot g}{\beta_1\cdot v_0}}},\ \frac{t_0}{\hat{t}}=\overset{\pi_1}{\overset{\shortparallel}{\frac{t_0\cdot\beta_1}{m}}}\right)$$

$$\Rightarrow y''(\tau)=-\pi_2^{-1}-y'(\tau),\ y(\pi_1)=0,\ y'(\pi_1)=1$$

(5): $\frac{t_0}{\hat{t}}=1,\ \frac{\hat{t}\cdot v_0}{\hat{x}}=1$

$$\Rightarrow \hat{t}=t_0,\ \hat{x}=t_0 v_0\quad \left(\Rightarrow \frac{\hat{t}^2\cdot g}{\hat{x}}=\overset{\pi_1\pi_2^{-1}}{\overset{\shortparallel}{\frac{t_0\cdot g}{v_0}}},\ \frac{\hat{t}\cdot\beta_1}{m}=\overset{\pi_1}{\overset{\shortparallel}{\frac{t_0\beta_1}{m}}}\right)$$

$$\Rightarrow y''(\tau)=-\pi_1\pi_2^{-1}-\pi_1\cdot y'(\tau),\ y(1)=0,\ y'(1)=1$$

Beachte: Im Fall $t_0=0$ entfallen die Fälle (2) & (5). In den Fällen (1), (3), (4) gilt dann $\pi_1=0$.

(b) (1): $\frac{\hat{t}^2\cdot g}{\hat{x}}=1,\ \frac{\hat{x}\cdot\beta_2}{m}=1$

$$\Rightarrow \hat{x}=\frac{m}{\beta_2},\ \hat{t}=\sqrt{\frac{m}{\beta_2\cdot g}}\quad \left(\Rightarrow \frac{t_0}{\hat{t}}=\overset{\pi_1^{\frac{1}{2}}}{\overset{\shortparallel}{\sqrt{\frac{\beta_2\cdot g\cdot t_0^2}{m}}}},\ \frac{\hat{t}\cdot v_0}{\hat{x}}=\overset{\pi_2^{\frac{1}{2}}}{\overset{\shortparallel}{\sqrt{\frac{v_0^2\ \beta_2}{m\cdot g}}}}\right)$$

$$\Rightarrow y''(\tau)=-1-|y'(\tau)|\,y'(\tau),\ y(\pi_1^{\frac{1}{2}})=0,\ y'(\pi_1^{\frac{1}{2}})=\pi_2^{\frac{1}{2}}$$

(2): $\frac{\hat{t}^2\cdot g}{\hat{x}}=1,\ \frac{t_0}{\hat{t}}=1$

$$\Rightarrow \hat{t}=t_0,\ \hat{x}=t_0^2\cdot g\quad \left(\Rightarrow \frac{\hat{x}\cdot\beta_2}{m}=\overset{\pi_1}{\overset{\shortparallel}{\frac{t_0^2\cdot g\cdot\beta_2}{m}}},\ \frac{\hat{t}\cdot v_0}{\hat{x}}=\overset{\pi_1^{-\frac{1}{2}}\cdot\pi_2^{\frac{1}{2}}}{\overset{\shortparallel}{\frac{v_0}{t_0 g}}}\right)$$

$$\Rightarrow y''(\tau)=-1-\pi_1|y'(\tau)|\cdot y'(\tau),\ y(1)=0,\ y'(1)=\pi_1^{-\frac{1}{2}}\cdot\pi_2^{\frac{1}{2}}$$

(4): $\frac{\hat{x}\cdot\beta_2}{m}=1,\ \frac{t_0}{\hat{t}}=1$

$$\Rightarrow \hat{t}=t_0,\ \hat{x}=\frac{m}{\beta_2}\quad \left(\Rightarrow \frac{\hat{t}^2\cdot g}{\hat{x}}=\overset{\pi_1}{\overset{\shortparallel}{\frac{t_0^2\cdot g\cdot\beta_2}{m}}},\ \frac{\hat{t}\cdot v_0}{\hat{x}}=\overset{\pi_1^{\frac{1}{2}}\cdot\pi_2^{\frac{1}{2}}}{\overset{\shortparallel}{\frac{t_0\cdot v_0\cdot\beta_2}{m}}}\right)$$

$$\Rightarrow y''(\tau)=-\pi_1-|y'(\tau)|\cdot y'(\tau),\ y(1)=0,\ y'(1)=\pi_1^{\frac{1}{2}}\cdot\pi_2^{\frac{1}{2}}$$

(5): $\frac{\hat{x}\cdot\beta_2}{m}=1,\ \frac{\hat{t}\cdot v_0}{\hat{x}}=1$

$$\Rightarrow \hat{x}=\frac{m}{\beta_2},\ \hat{t}=\frac{m}{\beta_2\cdot v_0}\quad \left(\Rightarrow \frac{\hat{t}^2\cdot g}{\hat{x}}=\overset{\pi_2^{-1}}{\overset{\shortparallel}{\frac{m\cdot g}{\beta_2 v_0^2}}}\ \frac{t_0}{\hat{t}}=\overset{\pi_1^{\frac{1}{2}}\cdot\pi_2^{\frac{1}{2}}}{\overset{\shortparallel}{\frac{t_0\cdot v_0\cdot\beta_2}{m}}}\right)$$

$$\Rightarrow y''(\tau)=-\pi_2^{-1}-|y'(\tau)|\cdot y'(\tau),\ y(\pi_1^{\frac{1}{2}}\cdot\pi_2^{\frac{1}{2}})=0,\ y'(\pi_1^{\frac{1}{2}}\pi_2^{\frac{1}{2}})=1$$

(6): $\frac{t_0}{\hat{t}}=1,\ \frac{\hat{t}\cdot v_0}{\hat{x}}=1$

$$\Rightarrow \hat{t}=t_0,\ \hat{x}=t_0 v_0\quad \left(\Rightarrow \frac{\hat{t}^2\cdot g}{\hat{x}}=\overset{\pi_1^{\frac{1}{2}}\cdot\pi_2^{-\frac{1}{2}}}{\overset{\shortparallel}{\frac{t_0\cdot g}{v_0}}},\ \frac{\hat{x}\cdot\beta_2}{m}=\overset{\pi_1^{\frac{1}{2}}\cdot\pi_2^{\frac{1}{2}}}{\overset{\shortparallel}{\frac{t_0 v_0\beta_2}{m}}}\right)$$

$$\Rightarrow y''(\tau)=-\pi_1^{\frac{1}{2}}\pi_2^{-\frac{1}{2}}-\pi_1^{\frac{1}{2}}\pi_2^{\frac{1}{2}}|y'(\tau)|\,y'(\tau),\ y(0)=0,\ y'(0)=1$$

(3): $\frac{\hat{t}^2\cdot g}{\hat{x}}=1,\ \frac{\hat{t}\cdot v_0}{\hat{x}}=1$

$$\Rightarrow \hat{t}=\frac{v_0}{g},\ \hat{x}=\frac{v_0^2}{g}\quad \left(\Rightarrow \frac{\hat{x}\,\beta_2}{m}=\overset{\pi_2}{\overset{\shortparallel}{\frac{v_0^2\beta_2}{g\cdot m}}},\ \frac{t_0}{\hat{t}}=\overset{\pi_1^{\frac{1}{2}}\pi_2^{-\frac{1}{2}}}{\overset{\shortparallel}{\frac{t_0\cdot g}{v_0}}}\right)$$

$$\Rightarrow y''(\tau)=-1-\pi_2|y'(\tau)|\cdot y'(\tau),\ y(\pi_1^{\frac{1}{2}}\pi_2^{-\frac{1}{2}})=0,\ y'(\pi_1^{\frac{1}{2}}\pi_2^{-\frac{1}{2}})=1$$

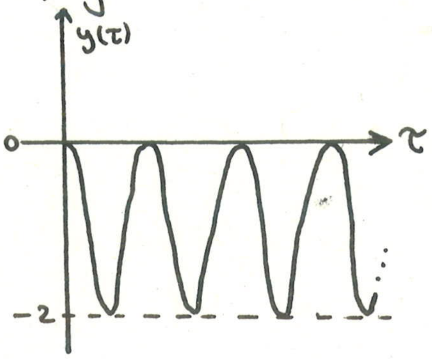
Beachte: Im Fall $t_0=0$ entfallen die Fälle (2), (4) & (6). In den Fällen (1), (3), (5) gilt dann $\pi_1=0$

Modellvereinfachung:

(a): Unter der Annahme $\gamma := \frac{\beta_1 v_0}{mg} \ll 1$ gilt $0 < \Pi_2 \ll 1$. Wir analysieren (im Fall $t_0 = 0$, also $\Pi_1 = 0$), ob wir Π_2 in (1), (3), (4) vernachlässigen können (d.h. $\Pi_2 = 0$ setzen dürfen)

(1): $y''(\tau) = -1 - y'(\tau)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

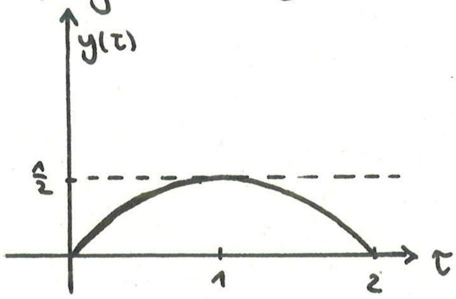
$\Rightarrow y(\tau) = \cos(\tau) - 1 \Rightarrow$ Lösungen unbrauchbar! (da Höhe y negativ ist)



Lösungen negativ!

(3): $y''(\tau) = -1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

$\Rightarrow y(\tau) = -\frac{1}{2}(\tau - 2)\tau$



Lösung gut!

(4): $0 = -1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

$\Rightarrow$ es existieren keine Lösungen (Problem nicht gut gestellt)