Aufgabe 16:

$$(16.1) \quad y'' + \varepsilon y' + 1 = 0 \;,\; y(0) = 0 \;,\; y'(0) = 1$$

Es bezeichne $\bar{y} = \bar{y}(\cdot;\varepsilon)$ die Lösung von (16.1) für $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$.
Dann löst $\bar{y}(\cdot;0)$ die AWA

$$y'' + 1 = 0 \;,\; y(0) = 0 \;,\; y'(0) = 1$$

Definiere

$$F(y;\varepsilon) := y'' + \varepsilon y' + 1$$

Asymptotische Entwicklung (bzgl. ε für $\varepsilon \to 0$):

Ansatz:

$$(16.2) \quad y^N(\tau;\varepsilon) := \sum_{j=0}^{N} y_j(\tau) \cdot \varepsilon^j$$

Bestimme $y_j \in C^2$ $(j = 0, \dots, N)$ derart, dass

$$F(y^N;\varepsilon) = o(\varepsilon^N) \text{ für } \varepsilon \to 0$$

N = 0:

Differentialgleichungen:

$$F(y^0;\varepsilon) = (y^0)'' + \varepsilon (y^0)' + 1$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylorentw. von } F \\ \text{in } \varepsilon = 0 \text{ der Ord } N=0}}{=} \left[(y^0)'' + 1\right] \cdot \varepsilon^0 + R_0(F(y^0;\cdot), \varepsilon, 0)$$

$$\underset{(16.2)}{=} \underbrace{\left[y_0'' + 1 \right]}_{\overset{!}{=} 0} \cdot \varepsilon^0 + \underbrace{R_0(F(y^0;\cdot), \varepsilon, 0)}_{= o(\varepsilon^0)}$$

Anfangsbedingungen:

$$0 \cdot \varepsilon^0 = 0 \overset{!}{=} y^0(0;\varepsilon) = y_0(0) \cdot \varepsilon^0 \implies y_0(0) = 0$$

$$1 \cdot \varepsilon^0 = 1 = (y^0)'(0;\varepsilon) = y_0'(0) \cdot \varepsilon^0 \implies y_0'(0) = 1$$

Anfangswertaufgaben für die Koeffizienten:

$$y_0'' + 1 = 0 \;,\; y_0(0) = 0 \;,\; y_0'(0) = 1$$

$$\implies \boxed{y_0(\tau) = \tau + \frac{\tau^2}{2}} \qquad \text{(insbesondere gilt damit } y_0(\tau) = \bar{y}(\tau;0))$$

$$\implies y^0(\tau;\varepsilon) = y_0(\tau) \cdot \varepsilon^0 = \tau + \frac{\tau^2}{2}$$

$N=1$:

Differentialgleichungen:

$$F(y^1;\varepsilon) = (y^1)'' + \varepsilon (y^1)' + 1$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylorentw. von } F \\ \text{in } \varepsilon=0 \text{ der Ord. } N=1}}{=} \underbrace{\left[(y^1)''+1\right]}_{=:f_0(y^1)}\cdot\varepsilon^0 + \frac{1}{1!}\underbrace{\left[(y^1)'\right]}_{=:f_1(y^1)}\cdot\varepsilon^1 + R_1(F(y^1;\cdot),\varepsilon,0)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylorentw. von } f_i \\ \text{in } y=\bar{y}(\cdot;0) \text{ der Ord. } N-i \\ i\in\{0,1\}}}{=} \left[\bar{y}''(\cdot;0)+1 + \frac{1}{1!}(y^1-\bar{y}(\cdot;0))'' + R_1(f_0,y^1,\bar{y}(\cdot;0))\right]\cdot\varepsilon^0$$

$$+\frac{1}{1!}\left[\bar{y}'(\cdot;0) + R_0(f_1,y^1,\bar{y}(\cdot;0))\right]\cdot\varepsilon^1 + R_1(F(y^1;\cdot),\varepsilon,0)$$

$$\underset{(16.2)}{=} \left[\cancel{\bar{y}''(\cdot;0)}+1+y_0''-\cancel{\bar{y}''(\cdot;0)}\right]\cdot\varepsilon^0 + \left[y_1''+\bar{y}'(\cdot;0)\right]\cdot\varepsilon^1$$

$$+\underbrace{R_1(f_0,y^1,\bar{y}(\cdot;0))}_{=o(\varepsilon^1)} + \varepsilon^1\cdot\underbrace{R_0(f_1,y^1,\bar{y}(\cdot;0))}_{=o(\varepsilon^0)} + \underbrace{R_1(F(y^1;\cdot),\varepsilon,0)}_{=o(\varepsilon^1)}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ y_0(\tau)=\bar{y}(\cdot;0)}}{=} \underbrace{\left[y_0''+1\right]}_{\overset{!}{=}0}\cdot\varepsilon^0 + \underbrace{\left[y_1''+y_0'\right]}_{\overset{!}{=}0}\cdot\varepsilon^1 + o(\varepsilon^1)$$

Anfangsbedingungen:

$$0\cdot\varepsilon^0+0\cdot\varepsilon^1=0 \overset{!}{=} y^1(0;\varepsilon) = y_0(0)\cdot\varepsilon^0 + y_1(0)\cdot\varepsilon^1 \Rightarrow y_0(0)=0,\ y_1(0)=0$$

$$1\cdot\varepsilon^0+0\cdot\varepsilon^1=0 \overset{!}{=} (y^1)'(0;\varepsilon) = y_0'(0)\cdot\varepsilon^0 + y_1'(0)\cdot\varepsilon^1 \Rightarrow y_0'(0)=1,\ y_1'(0)=0$$

Anfangswertaufgaben für die Koeffizienten:

$$y_0''+1=0, \quad y_0(0)=0,\ y_0'(0)=1$$

$$y_1''+y_0'=0, \quad y_1(0)=0,\ y_1'(0)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} y_0(\tau) &= \tau+\frac{\tau^2}{2} \\ y_1(\tau) &= -\frac{\tau^2}{2}-\frac{\tau^3}{6}\end{aligned}}$$

$$\Rightarrow y^1(\tau;\varepsilon) = y_0(\tau)\cdot\varepsilon^0 + y_1(\tau)\cdot\varepsilon^1 = \left(\tau+\frac{\tau^2}{2}\right)\cdot\varepsilon^0 + \left(-\frac{\tau^3}{6}-\frac{\tau^4}{24}\right)\varepsilon^1$$

$N=2$:

Differentialgleichungen:

$$F(y^2;\varepsilon) = (y^2)'' + \varepsilon (y^2)' + 1$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylorentw. von } F \\ \text{in } \varepsilon=0 \text{ der Ord. } N=2}}{=} \underbrace{\left[(y^2)''+1\right]}_{=:f_0(y^2)}\cdot\varepsilon^0 + \frac{1}{1!}\underbrace{\left[(y^2)'\right]}_{=:f_1(y^2)}\cdot\varepsilon^1 + \frac{1}{2!}\cdot\underbrace{0}_{=0=:f_2(y^2)}\cdot\varepsilon^2 + R_2(F(y^2;\cdot),\varepsilon,0)$$

$$= \Big[\big(\bar{y}''(\cdot;0)+1\big) + \frac{1}{1!}\big((y^2) - \bar{y}(\cdot;0)\big)'' + \frac{1}{2!}\cdot 0 \cdot \big(y^2 - \bar{y}(\cdot;0)\big)^2 + R_2\big(f_0, y^2, \bar{y}(\cdot;0)\big)\Big]\cdot \varepsilon^0$$

Taylorentw. von f_i in $y = \bar{y}(\cdot;0)$ der Ord. $N-i$, $i \in \{0,1,2\}$

$$+ \frac{1}{1!}\Big[\bar{y}'(\cdot;0) + \frac{1}{1!}\big(y^2 - \bar{y}(\cdot;0)\big)' + R_1\big(f_1, y^2, \bar{y}(\cdot;0)\big)\Big]\cdot\varepsilon^1$$

$$+ R_2\big(\mathcal{F}(y^2;\cdot), \varepsilon, 0\big)$$

$$\overset{(16.2)}{=} \cancel{\bar{y}''(\cdot;0)} + 1 + y_0'' + y_1''\varepsilon^1 + y_2''\varepsilon^2 - \cancel{\bar{y}''(\cdot;0)} + \cancel{\bar{y}'(\cdot;0)}\cdot\varepsilon^1 + y_0'\varepsilon^1 + y_1'\varepsilon^2 + y_2'\varepsilon^3 - \cancel{\bar{y}'(\cdot;0)}\varepsilon^1$$

$$+ R_2\big(f_0, y^2, \bar{y}(\cdot;0)\big) + \varepsilon^1\cdot R_1\big(f_1, y^2, \bar{y}(\cdot;0)\big) + R_2\big(\mathcal{F}(y^2;\cdot), \varepsilon, 0\big)$$

$\mathcal{O}(\varepsilon^0)$
$\mathcal{O}(\varepsilon^1)$
$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$
$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ Restterme

$$= \underbrace{\big[y_0'' + 1\big]}_{\overset{!}{=}0}\cdot\varepsilon^0 + \underbrace{\big[y_1'' + y_0'\big]}_{\overset{!}{=}0}\cdot\varepsilon^1 + \underbrace{\big[y_2'' + y_1'\big]}_{\overset{!}{=}0}\cdot\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Anfangsbedingungen:

Koeffizienten-vergleich

$$0\cdot\varepsilon^0 + 0\cdot\varepsilon^1 + 0\cdot\varepsilon^2 = 0 \overset{!}{=} y^2(0;\varepsilon) = y_0(0)\cdot\varepsilon^0 + y_1(0)\cdot\varepsilon^1 + y_2(0)\varepsilon^2 \Rightarrow y_j(0) = 0, \quad j = 0,1,2$$

$$1\cdot\varepsilon^0 + 0\cdot\varepsilon^1 + 0\cdot\varepsilon^2 = 1 = (y^2)'(0;\varepsilon) = y_0'(0)\cdot\varepsilon^0 + y_1'(0)\varepsilon^1 + y_2'(0)\varepsilon^2 \Rightarrow y_0'(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \; y_2'(0) = 0$$

Anfangswertaufgaben für die Koeffizienten:

$\mathcal{O}(\varepsilon^0)$	$y_0'' + 1 = 0$	$y_0(0) = 0$	$y_0'(0) = 1$
$\mathcal{O}(\varepsilon^1)$	$y_1'' + y_0' = 0$	$y_1(0) = 0$	$y_1'(0) = 0$
$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$	$y_2'' + y_1' = 0$	$y_2(0) = 0$	$y_2'(0) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} y_0(\tau) &= \tau + \frac{\tau^2}{2} \\ y_1(\tau) &= -\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{6} \\ y_2(\tau) &= -\frac{\tau^3}{6} - \frac{\tau^4}{24} \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow y^2(\tau;\varepsilon) = \Big(\tau + \frac{\tau^2}{2}\Big)\cdot\varepsilon^0 + \Big(-\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{6}\Big)\cdot\varepsilon^1 + \Big(-\frac{\tau^3}{6} - \frac{\tau^4}{24}\Big)\cdot\varepsilon^2$$