Aufgabe 17:

(17.1) $\quad y'' + \varepsilon y' + \sin(y) = 0\,,\quad y(0) = w\,,\quad y'(0) = 0$

Es bezeichne $\bar{y} = \bar{y}(\cdot;\varepsilon)$ die Lösung von (17.1) für $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$.
Dann löst $\bar{y}(\cdot;0)$ die AWA $y'' + \sin(y) = 0$, $y(0) = w$, $y'(0) = 0$

Definiere:

$$\mathcal{F}(y;\varepsilon) := y'' + \varepsilon y' + \sin(y)$$

Asymptotische Entwicklung (bzgl. ε für $\varepsilon \to 0$)

Ansatz:

(17.2) $\quad y^N(\tau;\varepsilon) := \sum_{j=0}^{N} y_j(\tau)\cdot\varepsilon^j$

Bestimme $y_j \in C^2$ $(j = 0,\dots,N)$ derart, dass

$$\mathcal{F}(y^N;\varepsilon) = o(\varepsilon^N) \quad \text{für } \varepsilon \to 0$$

N=0:

Differentialgleichungen:

$$\mathcal{F}(y^0;\varepsilon) = (y^0)'' + \varepsilon (y^0)' + \sin(y^0)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Taylorentw. von } \mathcal{F}\\ \text{in } \varepsilon=0 \text{ der Ord. } N=0}}{=} \left[(y^0)'' + \sin(y^0)\right]\cdot\varepsilon^0 + \underbrace{R_0\left(\mathcal{F}(y^0;\cdot),\varepsilon,0\right)}_{=o(\varepsilon^0)}$$

$$\underset{(17.2)}{=} \underbrace{\left[y_0'' + \sin(y_0)\right]}_{\overset{!}{=}0}\cdot\varepsilon^0 + o(\varepsilon^0)$$

Anfangsbedingungen:

Koeffizienten-Vergleich

$$w\cdot\varepsilon^0 = w \overset{!}{=} y^0(0;\varepsilon) \overset{(17.2)}{=} y_0(0)\cdot\varepsilon^0 \quad \Rightarrow \quad y_0(0) = w$$

$$0\cdot\varepsilon^0 = 0 \overset{!}{=} (y^0)'(0;\varepsilon) \underset{(17.2)}{=} y_0'(0)\cdot\varepsilon^0 \quad \Rightarrow \quad y_0'(0) = 0$$

Anfangswertaufgaben für die Koeffizienten:

$$y_0'' + \sin(y_0) = 0\,,\quad y_0(0) = w\,,\quad y_0'(0) = 0$$

y_0 kann nicht mehr analytisch angegeben werden

N=1:

Differentialgleichungen:

$$F(y^1;\varepsilon) = (y^1)'' + \varepsilon (y^1)' + \sin(y^1)$$

$$\underset{\substack{\text{Taylorentw. von } F \\ \text{in } \varepsilon=0 \text{ der Ord. } N=1}}{=} \underbrace{\left[(y^1)'' + \sin(y^1)\right]}_{=:f_0(y^1)} \cdot \varepsilon^0 + \frac{1}{1!}\underbrace{\left[(y^1)'\right]}_{=f_1(y^1)} \cdot \varepsilon^1 + R_1(F(y^1;\cdot),\varepsilon,0)$$

$$\underset{\substack{\text{Taylorentw. von } f_i \\ \text{in } y=\bar{y}(\cdot;0) \text{ der Ord. } N-i \\ i\in\{0,1\}}}{=} \Big[\bar{y}''(\cdot;0) + \sin(\bar{y}(\cdot;0)) + \frac{1}{1!}\Big((y^1-\bar{y}(\cdot;0))'' + \cos(\bar{y}(\cdot;0))\cdot(y^1-\bar{y}(\cdot;0))\Big) + R_1(f_0,y^1,\bar{y}(\cdot;0)) \Big]\cdot\varepsilon^0$$

$$+ \frac{1}{1!}\Big[\bar{y}'(\cdot;0) + R_0(f_1,y^1,\bar{y}(\cdot;0))\Big]\cdot\varepsilon^1 + R_1(F(y^1;\cdot),\varepsilon,0)$$

$$\underset{(17.2)}{=} \Big[\bar{y}''(\cdot;0) + \sin(\bar{y}(\cdot;0)) + y_0'' - \bar{y}''(\cdot;0) + \cos(\bar{y}(\cdot;0))\,y_0 - \cos(\bar{y}(\cdot;0))\,\bar{y}(\cdot;0)\Big]\cdot\varepsilon^0$$

$$+ \Big[y_1'' + \cos(\bar{y}(\cdot;0))\,y_1 + \bar{y}'(\cdot;0)\Big]\cdot\varepsilon^1$$

$$+ \underbrace{R_1(f_0,y^1,\bar{y}(\cdot;0))}_{=\mathcal{O}(\varepsilon^1)} + \varepsilon^1\cdot\underbrace{R_0(f_1,y^1,\bar{y}(\cdot;0))}_{=\mathcal{O}(\varepsilon^0)} + \underbrace{R_1(F(y^1;\cdot),\varepsilon,0)}_{=\mathcal{O}(\varepsilon^1)}$$

$$\underset{y_0(\tau)=\bar{y}(\tau;\varepsilon)}{=} \Big[\underbrace{y_0'' + \sin(y_0)}_{\stackrel{!}{=}0} + \cancel{y_0''} - \cancel{y_0''} + \cancel{\cos(y_0)\,y_0} - \cancel{\cos(y_0)\,y_0}\Big]\,\varepsilon^0$$

$$+ \underbrace{\Big[y_1'' + \cos(y_0)\,y_1 + y_0'\Big]}_{\stackrel{!}{=}0}\cdot\varepsilon_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^1)$$

Anfangsbedingungen:

$$w\cdot\varepsilon^0 + 0\cdot\varepsilon^1 = w \stackrel{!}{=} y^1(0;\varepsilon) = y_0(0)\cdot\varepsilon^0 + y_1(0)\cdot\varepsilon^1 \implies y_0(0)=w,\ y_1(0)=0$$

$$0\cdot\varepsilon^0 + 0\cdot\varepsilon^1 = 0 \stackrel{!}{=} (y^1)'(0;\varepsilon) = y_0'(0)\cdot\varepsilon^0 + y_1'(0)\cdot\varepsilon^1 \implies y_0'(0)=0,\ y_1'(0)=0$$

Anfangswertaufgaben für die Koeffizienten:

$$y_0'' + \sin(y_0) = 0,\quad y_0(0)=w,\quad y_0'(0)=0$$

$$y_1'' + \cos(y_0)\,y_1 + y_0' = 0,\quad y_1(0)=0,\quad y_1'(0)=0$$

Lösungen können leider nicht mehr analytisch angegeben werden.