Aufgabe 18:

$$(18.1) \qquad y' + \varepsilon y - 4 = 0 \,, \quad y(0) = 1$$

Es bezeichne $\bar{y} = \bar{y}(\cdot\,;\varepsilon)$ die Lösung von (18.1) für $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$.

Dann löst $\bar{y}(\cdot\,;0)$ die AWA

$$y' - 4 = 0 \,, \quad y(0) = 1$$

Definiere

$$F(y;\varepsilon) := y' + \varepsilon y - 4$$

Asymptotische Entwicklung (bzgl. ε für $\varepsilon \to 0$)

Ansatz:

$$(18.2) \qquad y^N(\tau;\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} y_j(\cdot)\, \varepsilon^j$$

Bestimme $y_j \in C^2$ ($j = 0, \dots, N$) derart, dass

$$F(y^N;\varepsilon) = o(\varepsilon^N) \quad \text{für } \varepsilon \to 0 .$$

$N \geq 1$ (beliebig):

Differentialgleichungen:

$$F(y^N;\varepsilon) = (y^N)' + \varepsilon y^N - 4$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylorentwicklung} \\ \text{in } \varepsilon = 0 \text{ der Ord } N \geq 1}}{=} \left[(y^N)' - 4 \right] \cdot \varepsilon^0 + \frac{1}{1!} \left[y^N \right] \cdot \varepsilon^1 + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot \varepsilon^2 + 0 \cdot \varepsilon^3 + \dots + 0 \cdot \varepsilon^N + R_N(F(y^N;\cdot), \varepsilon, 0)$$

$$\underset{(18.2)}{=} \left(\sum_{j=0}^{N} y_j' \varepsilon^j \right) - 4 + \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{N-1} y_j \varepsilon^{j+1} \right)}_{= \sum_{j=1}^{N} y_{j-1} \cdot \varepsilon^j} + \underbrace{y_N \varepsilon^{N+1}}_{= o(\varepsilon^N)} + \underbrace{R_N(F(y^N;\cdot), \varepsilon, 0)}_{= o(\varepsilon^N)}$$

$$= \underbrace{\left[y_0' - 4 \right]}_{\overset{!}{=} 0} \cdot \varepsilon^0 + \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\left[y_j' + y_{j-1} \right]}_{\overset{!}{=} 0} \cdot \varepsilon^j + o(\varepsilon^N)$$

Anfangsbedingung:

$$1 \cdot \varepsilon^0 + \sum_{j=1}^{N} 0 \cdot \varepsilon^j = 1 = y^N(0;\varepsilon) = y_0(0) + \sum_{j=1}^{N} y_j(0) \cdot \varepsilon^j \implies y_0(0) = 1 \,, \; y_j(0) = 0 \,, \; j = 1, \dots, N$$

Anfangswertaufgaben für die Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
y_0' - 4 &= 0 \,, & y_0(0) &= 1 \\
y_1' + y_0 &= 0 \,, & y_1(0) &= 0 \\
y_2' + y_1 &= 0 \,, & y_2(0) &= 0 \\
&\vdots & &\vdots \\
y_N' + y_{N-1} &= 0 \,, & y_N(0) &= 0
\end{aligned}$$

Lösungen:

$$\boxed{\begin{aligned} y_0(\tau) &= 4\tau + 1 \\ y_1(\tau) &= -2\tau^2 - \tau \\ y_2(\tau) &= \frac{2}{3}\tau^3 + \frac{1}{2}\tau^2 \\ &\vdots \\ y_N(\tau) &= (-1)^N \cdot \frac{4}{(N+1)!}\,\tau^{N+1} + \frac{1}{N!}\,\tau^N \end{aligned}}$$

allgemeiner:

$$y_j(\tau) = (-1)^j \frac{4}{(j+1)!}\,\tau^{j+1} + \frac{1}{j!}\cdot\tau^j$$

$j = 0, \ldots, N$

$$\Rightarrow \quad y^N(\tau;\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \left[(-1)^j \frac{4}{(j+1)!}\,\tau^{j+1} + \frac{1}{j!}\,\tau^j \right] \cdot \varepsilon^j$$