Aufgabe 19:

$$(19.1) \quad y'' + \varepsilon (y')^2 + 1 = 0 \;,\; y(0) = 0 \;,\; y'(0) = 1$$

Es bezeichne $\bar{y} = \bar{y}(\cdot\,;\varepsilon)$ die Lösung von (19.1) für $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$.
Dann löst $\bar{y}(\cdot\,;0)$ die AWA

$$y'' + 1 = 0 \;,\; y(0) = 0 \;,\; y'(0) = 1$$

Definiere:

$$F(y;\varepsilon) := y'' + \varepsilon (y')^2 + 1$$

Asymptotische Entwicklung (bzgl. ε für $\varepsilon \to 0$)

Ansatz:

$$(19.2) \quad y^N(\tau;\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} y_j(\tau) \cdot \varepsilon^j$$

Bestimme $y_j \in C^2$ $(j = 0, \dots, N)$ derart, dass

$$F(y^N;\varepsilon) = o(\varepsilon^N) \quad \text{für } \varepsilon \to 0$$

N = 0:

Differentialgleichung: $F(y^0;\varepsilon) = (y^0)'' + \varepsilon ((y^0)')^2 + 1$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylorentwicklung von } F \\ \text{in } \varepsilon = 0 \text{ der Ord. } N=0}}{=} \left[(y^0)'' + 1 \right] \cdot \varepsilon^0 + \underbrace{R_0(F(y^0;\cdot), \varepsilon, 0)}_{= o(\varepsilon^0)}$$

$$\underset{(19.2)}{=} \underbrace{\left[y_0'' + 1 \right]}_{\overset{!}{=} 0} \cdot \varepsilon^0 + o(\varepsilon^0)$$

Anfangsbedingungen:

$$0 \cdot \varepsilon^0 = 0 \overset{!}{=} y^0(0;\varepsilon) = y_0(0) \cdot \varepsilon^0 \implies y_0(0) = 0$$

$$1 \cdot \varepsilon^0 = 1 \overset{!}{=} (y^0)'(0;\varepsilon) = y_0'(0) \cdot \varepsilon^0 \implies y_0'(0) = 1$$

Anfangswertaufgaben für die Koeffizienten:

$$y_0'' + 1 = 0 \;,\; y_0(0) = 0 \;,\; y_0'(0) = 1$$

$$\implies \boxed{y_0(\tau) = -\frac{\tau^2}{2} + \tau}$$

$$\implies y^0(\tau;\varepsilon) = \left(-\frac{\tau^2}{2} + \tau \right) \cdot \varepsilon^0$$

$N=1$:

Differentialgleichung:

$$F(y^1;\varepsilon) = (y^1)'' + \varepsilon\left((y^1)'\right)^2 + 1$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Taylorentw. von } F\\ \text{in } \varepsilon=0 \text{ der Ord. } N=1}}{=} \underbrace{\left[(y^1)''+1\right]}_{=f_0(y^1)}\cdot\varepsilon^0 + \frac{1}{1!}\underbrace{\left[\left((y^1)'\right)^2\right]}_{=f_1(y^1)}\varepsilon^1 + R_1(F(y^1;\cdot),\varepsilon,0)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Taylorentw. von } f_i\\ \text{in } y=\bar{y}(\cdot;0) \text{ der Ord. } N-i\\ i\in\{0,1\}}}{=} \left[\bar{y}''(\cdot;0)+1 + \frac{1}{1!}\left(y^1-\bar{y}(\cdot;0)\right)'' + R_1(f_1,y^1,\bar{y}(\cdot;0))\right]\varepsilon^0$$

$$+\frac{1}{1!}\left[\left(\bar{y}'(\cdot;0)\right)^2 + R_0(f_1,y^1,\bar{y}(\cdot;0))\right]\cdot\varepsilon^1 + R_1(F(y^1;\cdot),\varepsilon,0)$$

$$\underset{(13.2)}{=} \cancel{\bar{y}''(\cdot;0)} + 1 + y_0'' + y_1''\varepsilon^1 - \cancel{\bar{y}''(\cdot;0)} + \left(\bar{y}'(\cdot;0)\right)^2\varepsilon^1$$

$$+\underbrace{R_1(f_1,y^1,\bar{y}(\cdot;0))}_{=\mathcal{O}(\varepsilon^1)} + \varepsilon^1\cdot\underbrace{R_0(f_1,y^1,\bar{y}(\cdot;0))}_{=\mathcal{O}(\varepsilon^0)} + \underbrace{R_1(F(y^1;\cdot),\varepsilon,0)}_{=\mathcal{O}(\varepsilon^1)}$$

$$\underset{y_0(\tau)=\bar{y}(\tau;0)}{=} \underbrace{\left[y_0''+1\right]}_{\overset{!}{=}0}\cdot\varepsilon^0 + \underbrace{\left[y_1''+(y_0')^2\right]}_{\overset{!}{=}0}\cdot\varepsilon^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^1)$$

Anfangsbedingungen:

$$0\cdot\varepsilon^0+0\cdot\varepsilon^1 = 0 \overset{!}{=} y^1(0;\varepsilon) = y_0(0)\cdot\varepsilon^0 + y_1(0)\cdot\varepsilon^1 \implies y_0(0)=0,\ y_1(0)=0$$

$$1\cdot\varepsilon^0+0\cdot\varepsilon^1 = 1 = (y^1)'(0;\varepsilon) = y_0'(0)\cdot\varepsilon^0 + y_1'(0)\cdot\varepsilon^1 \implies y_0'(0)=1,\ y_1'(0)=0$$

Anfangswertaufgaben für die Koeffizienten:

$$y_0''+1=0, \quad y_0(0)=0, \quad y_0'(0)=1$$

$$y_1''+(y_0')^2=0, \quad y_1(0)=0, \quad y_1'(0)=0$$

Lösungen

$$\boxed{\begin{aligned} y_0(\tau) &= -\frac{\tau^2}{2}+\tau \\ y_1(\tau) &= -\frac{1}{12}(\tau-1)^4-\frac{\tau}{3}+\frac{1}{12} \end{aligned}}$$

$$\implies y^1(\tau;\varepsilon) = \left(-\frac{\tau^2}{2}+\tau\right)\cdot\varepsilon^0 + \left(-\frac{1}{12}(\tau-1)^4-\frac{\tau}{3}+\frac{1}{12}\right)\cdot\varepsilon^1$$