

Mathematical Modelling and Simulation with Comsol Multiphysics

Sommersemester 2015

Übungsblatt 1

Dr. Denny Otten



Bearbeitung: Freitag, 17.04.2015, 12:00-14:00 Uhr (während der Übung).

Aufgaben zum Thema: **Gewöhnliche Differentialgleichungen mit Comsol Multiphysics**

Aufgabe 1 (Senkrechter Wurf und freier Fall eines Körpers - ohne Luftwiderstand).

Beschreibung des Problems: Wir betrachten einen Körper der **Masse** m , der im Gravitationsfeld der Erde zur **Abwurfszeit** t_0 senkrecht aus einer **Abwurfhöhe** u_0 und mit der **Abwurfgeschwindigkeit** v_0 nach oben geworfen wird. Dabei wird die Höhe des Körpers von der Erdoberfläche aus gemessen. Bei dem Wurf vernachlässigen wir den Strömungswiderstand der Atmosphäre (Luftwiderstand) und betrachten die Erde als Kugel mit **Radius** $R > 0$. Weiter bezeichne g die **Erdbeschleunigung**, $u(t)$ die **Höhe**, $v(t)$ die **Geschwindigkeit** und $a(t)$ die **Beschleunigung des Körpers zur Zeit** t . Seien m , u_0 , v_0 und g gegeben, so möchten wir den Zeitpunkt t_{ground} bestimmen, an dem der Körper wieder die Erdoberfläche berührt, d. h. t_{ground} mit $u(t_{\text{ground}}) = 0$.

Mathematische Modellierung: Die Bewegung des Körpers wird durch das **2. Newtonsche Gesetz** (**Bewegungsgesetz**)

$$\begin{aligned} \text{Kraft} &= \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung} \\ F &= m \cdot a \end{aligned} \quad (1)$$

beschrieben. Die **Kraft** F wird durch das **Newtonsche Gravitationsgesetz**

$$F = -G \frac{m_E \cdot m}{(u(t) + R)^2} \quad (2)$$

festgelegt, wobei $G \approx 6.67384(80) \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ die **Gravitationskonstante**, $m_E \approx 5.974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ die **Masse der Erde** und $R \approx 6.371 \cdot 10^6 \text{ m}$ den **Erdradius** bezeichnet. Definieren wir die **Erdbeschleunigung**

$$g := \frac{G \cdot m_E}{R^2} = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

so liefern (1) und (2) (wegen $u''(t) = a(t)$) die Anfangswertaufgabe

$$u''(t) = -\frac{gR^2}{(u(t) + R)^2}, \quad u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = v_0. \quad (3)$$

Aufgaben:

- Verwenden Sie Comsol Multiphysics und implementieren Sie mit Hilfe des Ihnen zur Verfügung gestellten Handouts den senkrechten Wurf (3) für die Daten

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad R = 10^7 \text{ m}, \quad t_0 = 0 \text{ s}, \quad u_0 = 0 \text{ m}, \quad v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

- Zu welchem Zeitpunkt t_{max} erreicht der Körper seine maximale Höhe u_{max} ? Wie lautet die maximale Höhe u_{max} ? Zu welchem Zeitpunkt t_{ground} berührt der Körper wieder die Erdoberfläche?
- Begründen Sie Ihre Beobachtungen und beschreiben Sie den Verlauf der Wurfparabel aus physikalischer Sicht.

Aufgabe 2 (Fallschirmsprung).

Beschreibung des Problems: Wir betrachten einen Fallschirmspringer der Masse m , der aus einer Absprunghöhe h_0 aus dem Flugzeug springt. Dabei wird die Höhe von der Erdoberfläche aus gemessen. In der Höhe h_1 öffnet der Springer seinen Fallschirm, wobei die Oberfläche des Fallschirms bei A_{FS} und die des Fallschirmspringers bei A_S liegt. Dabei berücksichtigen wir sowohl die Gravitationskraft als auch den Luftwiderstand. Bezüglich des Luftwiderstandes nehmen wir die Luftdichte ρ_L als konstant an und betrachten den Luftwiderstandsbeiwert c_W , der für den Springer und für den Fallschirm gleich angenommen wird. Weiter bezeichne g die Erdbeschleunigung, $u(t)$ die Höhe, $v(t)$ die Geschwindigkeit und $a(t)$ die Beschleunigung des Springers zur Zeit t . Seien $m, h_0, h_1, A_{FS}, A_S, \rho_L, c_W$ und g gegeben, so möchten wir den Zeitpunkt t_{ground} bestimmen, an dem der Fallschirmspringer die Erdoberfläche berührt.

Mathematische Modellierung: Die Bewegung des Körpers wird durch das 2. Newtonsche Gesetz (Bewegungsgesetz)

$$\begin{aligned} \text{Kraft} &= \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung} \\ F &= m \cdot a \end{aligned} \quad (4)$$

beschrieben. Die Gesamtkraft F setzt sich hierbei aus der Gravitationskraft $F_G = mg$ und dem entgegengesetzt wirkenden Luftwiderstand $F_W = \frac{1}{2}c_W\rho_L A v^2$ zusammen

$$F = -F_G + F_W = -mg + \frac{c_W\rho_L A}{2}v^2, \quad (5)$$

wobei $A = A_S$ für $u(t) < h_1$ (Oberfläche bei geschlossenem Fallschirm) und $A = A_{FS}$ für $u(t) \geq h_1$ (Oberfläche bei geöffnetem Fallschirm). Einsetzen von (5) in (4) liefert nach Division durch m (und wegen $a(t) = u''(t)$, $v(t) = u'(t)$) die Anfangswertaufgabe

$$u''(t) = -g + \frac{c_W\rho_L A}{2m}(u'(t))^2, \quad u(0) = h_0, \quad u'(0) = 0. \quad (6)$$

Aufgaben:

- Verwenden Sie Comsol Multiphysics und implementieren Sie den Fallschirmsprung (6) für die Daten

$$\begin{aligned} h_0 &= 3000 \text{ m}, & h_1 &= 1500 \text{ m}, & A_S &= 0.5 \text{ m}^2, & A_{FS} &= 30 \text{ m}^2, & m &= 85 \text{ kg}, \\ c_W &= 1.3, & \rho_L &= 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, & g &= 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned}$$

Lösen Sie dabei die Anfangswertaufgabe im Zeitintervall $I = [0, 300]$. Nutzen Sie dazu das BDF-Verfahren der Ordnung 2 und die maximale zeitliche Schrittweite $\Delta t = 0.1$. Erzeugen Sie jeweils einen Plot für die Höhe $u(t)$, die Geschwindigkeit $v(t)$ und die Beschleunigung $a(t)$ des Fallschirmspringers.

- Nach welcher Fallzeit erreicht der Springer (bei geschlossenem Schirm, d. h. $A = A_S$) eine nahezu konstante Geschwindigkeit? In welcher Höhe befindet er sich zu diesem Zeitpunkt? Wie lautet die maximale Geschwindigkeit, die der Springer während des Fallens erreicht?
- Begründen Sie Ihre Beobachtungen und beschreiben Sie den Verlauf der Geschwindigkeits- und Höhenverlauf aus physikalischer Sicht.