

Mathematical Modelling and Simulation with Comsol Multiphysics

Sommersemester 2015

Übungsblatt 3

Dr. Denny Otten



Bearbeitung: Freitag, 30.04.2015, 16:00-18:00 Uhr (während der Übung).

Aufgaben zum Thema: **Entdimensionalisierung und Skalierung**

Aufgabe 10 (Radioaktiver Zerfall).

Der **radioaktive Zerfall** (oder **Kernzerfall**) beschreibt in der Physik den Umwandlungsprozess, bei dem sich instabile Atomkerne spontan in andere Atomkerne umwandeln und dabei ionisierende Strahlung aussenden.

Wir betrachten eine radioaktive Substanzprobe. Es bezeichne $u(t)[N]$ die **Anzahl der zur Zeit t noch nicht zerfallenen instabilen Atomkerne** und $u_0[N]$ die **Anzahl der instabilen Atomkerne zum Anfangszeitpunkt $t_0[T]$** . Nach dem **Zerfallsgesetz** der Kernphysik gilt

$$u'(t) = -ku(t), \quad u(t_0) = u_0 \quad (1)$$

mit einer konstanten positiven **Zerfallsrate** $k[T^{-1}]$ der Substanz.

Aufgaben:

- Entdimensionalisieren Sie die Anfangswertaufgabe (1) (nach Beispiel 1.6 ohne Berücksichtigung der Skalierung).

Aufgabe 11 (Populationsdynamik – Beschränktes Wachstum).

Das beschränkte Wachstum einer Population wird durch die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = qu_{\max}u(t) - qu^2(t), \quad u(0) = u_0 \quad (2)$$

beschrieben, wobei $u(t)[N]$ die **Populationsgröße zur Zeit $t[T]$** , $u_0[N]$ die **Anfangspopulation**, $u_{\max}[N]$ die **maximale Populationsgröße** und $q[N^{-1}T^{-1}]$ eine positive **Wachstumsrate** bezeichnen.

Aufgaben:

- Entdimensionalisieren Sie das Modell (2) (nach Beispiel 1.7 mit Berücksichtigung der Skalierung). Welche drei Möglichkeiten der Entdimensionalisierung gibt es?
- Welches Modell ist sinnvoll für $u_0 \ll u_{\max}$ (d. h. u_0 sehr viel kleiner als u_{\max})?

Aufgabe 12 (Gedämpfte Federschwingung eines Körpers). Es bezeichne $m[M]$ die **Masse des Körpers** und $x(t)[L]$ die **Position des Körpers zur Zeit $t[T]$** . Dann lässt sich die gedämpfte Federschwingung eines Körpers durch die folgende Anfangswertaufgabe beschreiben

$$mx''(t) + rx'(t) + kx(t) = -mR\omega_0^2 \sin(\omega_0 t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad (3)$$

wobei $R[L]$ die **Amplitude der Anregung**, $k[MT^{-2}]$ die **Federkonstante**, $r[MT^{-1}]$ den **Dämpfungsfaktor** und $\omega_0[T^{-1}]$ die **Anregungsfrequenz der Schwingung** darstellt.

Aufgaben:

- Entdimensionalisieren Sie das Modell (3) (nach Beispiel 1.7 mit Berücksichtigung der Skalierung). Welche Möglichkeiten der Entdimensionalisierung gibt es?

Aufgabe 13 (Senkrechter Wurf und freier Fall eines Körpers - mit Luftwiderstand).

Ein Körper der Masse $m[\text{M}]$ wird von der Erdoberfläche senkrecht nach oben geworfen. Es bezeichne $x(t)[\text{L}]$ die Höhe, $v(t)[\text{LT}^{-1}]$ die Geschwindigkeit und $a(t)[\text{LT}^{-2}]$ die Beschleunigung des Körpers zur Zeit $t[\text{T}]$. Die Bewegung des Körpers resultiert aus dem 2. Newtonschen Gesetz

$$ma = F.$$

Die Kraft $F[\text{MLT}^{-2}]$ ergibt sich (unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes) aus

$$F = F_R + F_G, \quad F = F(t, x(t), v(t)),$$

wobei die Gravitationskraft $F_G[\text{MLT}^{-2}]$ nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz approximativ durch

$$F_G = -gm$$

mit Erdbeschleunigung $g[\text{LT}^{-2}]$ und die Reibungskraft $F_R[\text{MLT}^{-2}]$ durch

$$\begin{aligned} F_R &= -\beta_1 v(t), & (\text{Stokes-Reibung für kleine Geschwindigkeiten}) \\ F_R &= -\beta_2 |v(t)|v(t) & (\text{Newton-Reibung für höhere Geschwindigkeiten}) \end{aligned}$$

für positive Reibungskoeffizienten $\beta_1[\text{MT}^{-1}]$ und $\beta_2[\text{ML}^{-1}]$ gegeben sei. Dies liefert die beiden mathematischen Modelle

$$mx''(t) = -gm - \beta_1 x'(t), \quad x(t_0) = 0, \quad x'(t_0) = v_0, \quad (4)$$

$$mx''(t) = -gm - \beta_2 |x'(t)|x'(t), \quad x(t_0) = 0, \quad x'(t_0) = v_0, \quad (5)$$

wobei $v_0[\text{LT}^{-1}]$ die Abwurfgeschwindigkeit bezeichnet.

Aufgaben:

- Bestimmen Sie die dimensionslosen Parameter und mögliche intrinsische Referenzgrößen von (4) (nach Beispiel 1.2 und Beispiel 1.6 ohne Berücksichtigung der Skalierung).
- Entdimensionalisieren Sie das Modell (4) (nach Beispiel 1.7 mit Berücksichtigung der Skalierung). Welche Möglichkeiten der Entdimensionalisierung gibt es? Diskutieren Sie die verschiedenen Skalierungen für $t_0 = 0$, falls $\gamma_1 := \frac{\beta_1 v_0}{mg} \ll 1$.
- Entdimensionalisieren Sie nun das Modell (5) (nach Beispiel 1.7 mit Berücksichtigung der Skalierung). Welche Möglichkeiten der Entdimensionalisierung gibt es in diesem Fall? Diskutieren Sie die verschiedenen Skalierungen für $t_0 = 0$, falls $\gamma_2 := \frac{\beta_2 v_0^2}{mg} \ll 1$.

Aufgabe 14 (Entdimensionalisierung der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen).

$$\begin{aligned} \rho_0 (\partial_t v + (v \cdot \nabla)v) &= -\nabla p + \mu \Delta v, \\ \nabla \cdot v &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Aufgaben:

- Entdimensionalisieren Sie nun das Modell (6) (nach Beispiel 1.7 mit Berücksichtigung der Skalierung).