

# Mathematical Modelling and Simulation with Comsol Multiphysics

Sommersemester 2015

## Übungsblatt 4

Dr. Denny Otten



**Bearbeitung: Freitag, 07.05.2015, 14:00-16:00 Uhr** (während der Übung).

Aufgaben zum Thema: **Formale asymptotische Entwicklung**

### Aufgabe 15 (Van-der-Pol-Oszillator).

Die homogene (entdimensionalisierte) **Van-der-Pol-Gleichung**

$$y''(\tau) + y(\tau) + \varepsilon(y^2(\tau) - 1)y'(\tau), \quad y(0) = w, \quad y'(0) = 0. \quad (1)$$

beschreibt das zeitliche Verhalten einer gedämpften Federschwingung, der des sogenannten **Van-der-Pol-Oszillators**, wobei der dimensionslose Parameter  $\varepsilon \geq 0$  nicht-negativ ist und  $w \in \mathbb{R}$  sei. Eine geschlossene Darstellung der Lösung dieser Anfangswertaufgabe existiert nicht.

#### Aufgaben:

- Berechnen Sie die asymptotische Entwicklung 2. Ordnung der Lösung  $y(\cdot; \varepsilon)$  von (1) nach Potenzen von  $\varepsilon$ .

### Aufgabe 16 (Senkrechter Wurf und freier Fall eines Körpers - mit Luftwiderstand).

Die aus Aufgabe 13 bekannte Anfangswertaufgabe

$$mx''(t) = -gm - \beta x'(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0$$

beschreibt die Bewegung eines Körpers beim senkrechten Wurf und freien Fall unter Berücksichtigung der Stokes-Reibung (für kleine Geschwindigkeiten). Die zugehörige (und für kleine dimensionslosem Parameter  $\varepsilon := \frac{\beta v_0}{mg} \geq 0$  geeignete) entdimensionalisierte Anfangswertaufgabe lautet (vgl. Aufgabe 13)

$$y''(\tau) + \varepsilon y'(\tau) + 1 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \quad (2)$$

#### Aufgaben:

- Berechnen Sie die asymptotische Entwicklung 2. Ordnung der Lösung  $y(\cdot; \varepsilon)$  von (2) nach Potenzen von  $\varepsilon$ .

### Aufgabe 17.

Betrachten Sie die Anfangswertaufgabe

$$y''(\tau) + \varepsilon y'(\tau) + \sin(y(\tau)) = 0, \quad y(0) = w, \quad y'(0) = 0. \quad (3)$$

für  $\varepsilon \geq 0$  und  $w \in \mathbb{R}$ .

#### Aufgaben:

- Berechnen Sie die asymptotische Entwicklung 1. Ordnung der Lösung  $y(\cdot; \varepsilon)$  von (3) nach Potenzen von  $\varepsilon$ .

### Aufgabe 18.

Betrachten Sie die Anfangswertaufgabe

$$y'(\tau) + \varepsilon y(\tau) - 4 = 0, \quad y(0) = 1. \quad (4)$$

für  $\varepsilon \geq 0$ .

**Aufgaben:**

- Berechnen Sie die asymptotische Entwicklung  $N$ -ter Ordnung der Lösung  $y(\cdot; \varepsilon)$  von (4) nach Potenzen von  $\varepsilon$ , wobei  $N \in \mathbb{N}_0$  mit  $N \geq 1$  beliebig zugelassen ist.

### Aufgabe 19.

Betrachten Sie die Anfangswertaufgabe

$$y''(\tau) + \varepsilon (y'(\tau))^2 + 1 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \quad (5)$$

für  $\varepsilon \geq 0$ .

**Aufgaben:**

- Berechnen Sie die asymptotische Entwicklung 1. Ordnung der Lösung  $y(\cdot; \varepsilon)$  von (5) nach Potenzen von  $\varepsilon$ .