Mathematical Modelling and Simulation with Comsol Multiphysics

Sommersemester 2015

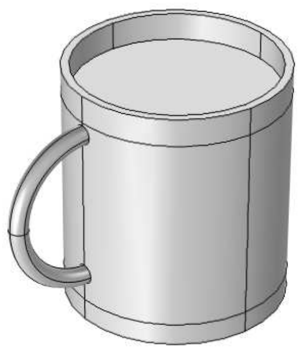
Übungsblatt 5

Dr. Denny Otten

Bearbeitung: Donnerstag, 21.05.2015, 14:00-16:00 Uhr (während der Übung).

Aufgaben zum Thema: **Wärmeleitung mit Comsol Multiphysics**

Aufgabe 20 (Abkühlungsprozess und Wärmeübertragung einer Kaffeetasse).



Gegeben sei eine zunächst leere Kaffeetasse (wie in der Abbildung veranschaulicht). Der innere Durchmesser der Tasse betrage 7.3 cm, der äußere Durchmesser 7.9 cm, die Gesamthöhe 8.8 cm und die maximale Füllhöhe 8.0 cm. Zudem sei die Tasse mit einem halbtorusförmigen Haltegriff versehen. Die im Torus zentrierte Kreislinie besitze einen Radius von 2.75 cm, der Radius innerhalb des Toruses liege bei 0.35 cm. Der Griff sei so angebracht, dass der mittlere Teil des Griffes einen Abstand von 4.6 cm von der unteren Kante des Tasse habe und die beiden Enden dieses Halbtoruses um 0.1 cm in die Tasse hineinversetzt seien. Das Material der Tasse bestehe aus herkömmlichen Glas (oder Porzellan). Um die Wärmeübertragung unserer bislang leeren Tasse zu simulieren, füllen wir diese nun bis zu einer Füllhöhe von 7.0 cm mit 70 Grad Celsius heißem Kaffee, dies entspricht einer Menge von 292.98 ml. Während des Eingiessvorganges betrage die Temperatur der Tasse 23 Grad Celsius. Auch die Raumtemperatur sei während des gesamten Abkühlungsprozesses konstant bei 23 Grad Celsius. Darüber hinaus sei es windstill, d. h. Ströhmungen in der Luft werden vernachlässigt. Die für die Simulation erforderlichen physikalischen Materialparameter sind die Dichten ρ, die spezifischen Wärmekapazitäten c sowie die Wärmeleitfähigkeiten λ der Materialien und der Flüssigkeit. Diese seien durch die folgenden Werte gegeben:

$$
\begin{aligned}
&\rho_{\text{Kaffee}} = 995\,\text{kg/m}^3, && c_{\text{Kaffee}} = 4182\,\text{J/(kg·K)}, && \lambda_{\text{Kaffee}} = 0.597\,\text{W/(m·K)},\\
&\rho_{\text{Glas}} = 2500\,\text{kg/m}^3, && c_{\text{Glas}} = 600\,\text{J/(kg·K)}, && \lambda_{\text{Glas}} = 0.76\,\text{W/(m·K)},\\
&\rho_{\text{Porzellan}} = 2300\,\text{kg/m}^3, && c_{\text{Porzellan}} = 730\,\text{J/(kg·K)}, && \lambda_{\text{Porzellan}} = 1.03\,\text{W/(m·K)}.
\end{aligned}
$$

Darüber hinaus benötigen wir den Wärmeübergangskoeffizienten κ der Umgebungsluft

$$\kappa_{\text{Luft}} = 2\,\text{W/(m}^2\text{·K)}.$$

Es bezeichne nun $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^3$ das Gebiet der Tasse und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^3$ das Gebiet des Kaffees. Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe

$$
\begin{aligned}
&\rho(x)c(x)\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) + \nabla\cdot(-\lambda(x)\nabla T(x,t)) = 0, && x \in \Omega_1 \cup \Omega_2,\ t > 0,\\
&-n(x)\cdot(-\lambda(x)\nabla(x,t)T) = -\kappa(T(x,t) - T_{\text{Luft}}), && x \in \partial\left(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}\right),\ t \geqslant 0,\\
&T(x,0) = T_0(x), && x \in \overline{\Omega_1 \cup \Omega_2},\ t = 0
\end{aligned}
$$

und bestimmen Sie die Temperaturverteilung T (in K), die nach einer Minute Abkühlung vorliegt. Hierbei sind die Größen $rho(x)$, $c(x)$ und $\lambda(x)$ durch ρ_{Kaffee}, c_{Kaffee} und $\lambda_{\mathrm{Kaffee}}$ gegeben, insofern $x \in \Omega_2$, bzw. durch ρ_{Glas}, c_{Glas} und λ_{Glas}, insofern $x \in \Omega_1$. $n(x)$ bezeichne den äußeren Normalenvektor, T_{Luft} die Umgebungsluft im Raum und $T_0(x)$ die Temperaturverteilung zu Beginn des Abkühlungsprozesses. Verwenden Sie bei der Berechnung für die räumliche Diskretisierung stückweise lineare Finite-Elemente mit maximalem Volumen $\delta x = 1.1\,\mathrm{cm}^3$ und für die zeitliche Diskretisierung das BDF-Verfahren der Ordnung 2 mit zeitlicher Schrittweite $\delta t = 0.1\,\mathrm{s}$ und zum Lösen der nichtlinearen Gleichungen das automatische Newton-Verfahren.