Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 1
15.04.2010

Abgabe: Donnerstag, 22.04.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 1: (Gleitkommaarithmetik)
Widerlegen Sie für die Gleitkommaoperationen $\tilde{+}$, $\tilde{\cdot}$, $\widetilde{\exp}$, $\widetilde{\cos}$ und $\widetilde{\sin}$ jeweils anhand eines Beispiels die folgenden Eigenschaften

(a) $\left(t \,\tilde{+}\, s\right) \tilde{+}\, r \;=\; t \,\tilde{+} \left(s \,\tilde{+}\, r\right),$

(b) $t \,\tilde{\cdot} \left(s \,\tilde{+}\, r\right) \;=\; (t \,\tilde{\cdot}\, s) \,\tilde{+}\, (t \,\tilde{\cdot}\, r),$

(c) $\widetilde{\exp}\left(t \,\tilde{+}\, s\right) \;=\; \widetilde{\exp}\,(t) \;\tilde{\cdot}\; \widetilde{\exp}\,(s),$

(d) $\widetilde{\cos}\,(\alpha) \,\tilde{\cdot}\, \widetilde{\cos}\,(\alpha) \,\tilde{+}\, \widetilde{\sin}\,(\alpha) \,\tilde{\cdot}\, \widetilde{\sin}\,(\alpha) \;=\; 1.$

Hinweis: Verwenden Sie dazu $t, s, r, \alpha \in G(2, 10)$, wobei $G(2, 10)$ die Menge aller Gleitkommazahlen mit Mantissenlänge 2 zur Basis 10 bezeichnet, sowie die Rundungsvorschrift $\mathrm{rd} : \mathbb{R} \to G(2, 10)$ aus der Vorlesung. Werten Sie dabei die Funktionen $\exp,\ \cos,\ \sin$ z. B. mit dem Taschenrechner auf genügend viele Stellen nach dem Komma aus und geben Sie die Zwischenergebnisse an.

(6 Punkte)

Aufgabe 2: (Programmieraufgabe, Rundungsfehler bei Iterationen)
Betrachten Sie zu der Funktion

$$f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto f_{a,b} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a x_1 \\ -(b - a^2) x_1^2 + b x_2 \end{pmatrix}$$

mit $0 < a < 1$ und $b > 1$ die Iterationsvorschrift

$$x^{(n)} \;=\; f_{a,b}\left(x^{(n-1)}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

wobei $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Anfangswert der Form

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} c \\ c^2 \end{pmatrix}$$

mit $c \in \mathbb{R}$ sei.

(a) Untersuchen Sie die durch (1) erzeugten Folgen $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zunächst analytisch hinsichtlich ihres Konvergenzverhaltens

$$\lim_{n\to\infty} \left\|x^{(n)}\right\|_2,$$

indem Sie eine von $x^{(0)}$ abhängige Darstellung für $x^{(n)}$ herleiten. Hinweis: Vollständige Induktion.
(b) Betrachten Sie anschließend speziell für $a = \frac{9}{10}$ und $b = 10$ die durch (1) erzeugten Folgen in Bezug auf ihr numerisches Konvergenzverhalten. Implementieren Sie dazu die gegebene Iteration, zeichnen Sie die ersten 25 Iterationswerte $\tilde{x}^{(n)}$ für den Anfangswert $x^{(0)} = (c, c^2)^T$ mit $c = 0.01$ in ein (x_1, x_2)-Diagramm und verbinden Sie diese der Reihenfolge entsprechend miteinander.
Plotten Sie

$$\left\|\tilde{x}^{(n)}\right\|_2 \text{ über } n = 0, \ldots, 25,$$

indem Sie die y-Achse logarithmisch skalieren. Hinweis: `semilogy`.
(c) Vergleichen Sie das analytische Ergebnis mit dem numerischen und interpretieren Sie diese. Hängt das Ergebnis von der Wahl $c = 0.01$ ab?

(6 Punkte)

Aufgabe 3: (Programmieraufgabe, Rundungsfehler bei Addition)
Gegeben seien die Partialsummen

$$S(n) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

(a) Berechnen Sie die Partialsummen $S(n)$ für $n = 2^j$ und $j = 1, \ldots, 30$ durch vorwärts (d. h. $k = 1, \ldots, n$) und rückwärts (d. h. $k = n, \ldots, 1$) Summation.
Zeichnen Sie die Abweichung

$$\left|\tilde{S}(n) - \lim_{m\to\infty} S(m)\right|$$

der beiden numerischen Approximationen $\tilde{S}(n)$ vom analytischen Grenzwert

$$\lim_{m\to\infty} S(m) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Benutzen Sie dabei einen logarithmischen Maßstab auf beiden Achsen. Begründen Sie abschließend Ihre Beobachtungen.
(b) Berechnen Sie mit Hilfe der *Rundungsfehler GUI*, die über `Matlab starten` → `Start` → `Toolboxes` → `NUMLAB GUIs` → `Rundungsfehler` zu erreichen ist, die Partialsummen $S(n)$ durch vorwärts und rückwärts Summation. Verwenden Sie dazu in der Rundungsfehler GUI die Parameter 1000 für die maximale Anzahl an Schritten und 4 für die Mantissenlänge. Lassen Sie sich die Ausgabe für jeden Schritt anzeigen. Dokumentieren Sie die beiden Ergebnisse jeweils durch einen Screenshot.

(6 Punkte)