Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 3
29.04.2010

Abgabe: Donnerstag, 06.05.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 7: (Berechnung von Interpolationspolynomen)
Berechnen Sie *von Hand* das Interpolationspolynom p, das durch die Punkte

$$(-4,-1)\,,\ (-2,1)\,,\ (0,10)\,,\ (2,9)$$

verläuft

(a) unter Verwendung der Lagrangeschen Basispolynome,

(b) in der Newtonschen Darstellung.

Überführen Sie das resultierende Polynom p jeweils in die Monomdarstellung

$$p(t) = \sum_i a_i t^i.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 8: (Programmieraufgabe, dividierte Differenzen, Horner-artiges Schema)

(a) Werten Sie mit dem Newton-Schema der dividierten Differenzen das Interpolationspolynom p zu den Daten $(t_i, s_i),\ i = 0, \ldots, m$ aus, wobei die Daten $s_i = f(t_i)$ durch Auswertung von $f(t) = \exp(-t^2)$ entstehen. Verwenden Sie zunächst die $m + 1 = 20$ Stützstellen

$$t_i = a + \frac{(b-a)}{m} \cdot i, \quad i = 0, \ldots, m$$

mit $a = -2$, $b = 2$ und berechnen Sie den Fehler $|f(\tau_i) - p(\tau_i)|$ an Zwischenpunkten

$$\tau_i = a + \frac{(b-a)}{2m} + \frac{(b-a)}{m} \cdot i, \quad i = 0, \ldots, m-1.$$

Zeichnen Sie die Graphen von f und p sowie den Fehler $|f - p|$ in ein Diagramm.

Bestimmen Sie in einer zweiten Rechnung für $m+1 = 2, \dots, 100$ Stützstellen speziell das m, für das der Fehler

$$e_m := \max\left\{ |f(\zeta_i) - p_m(\zeta_i)| \ : \ i = 1, \dots, 2000 \right\} \quad \text{mit} \quad \zeta_i := a + \frac{(b-a)}{2001} i$$

minimal wird. Hierbei bezeichnet p_m das Interpolationspolynom zu den $m+1$-Datenpaaren (t_i, s_i) für $i = 0, \dots, m$. Zeichnen Sie die Fehler logarithmisch in Abhängigkeit von m. Hinweis: `semilogy`. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

(b) Verfahren Sie ebenso mit der Funktion $f(t) = \frac{t^2 \sin(4t)}{10}$ mit $m+1 = 20$ äquidistanten Stützstellen sowie $a = -4\pi$ und $b = 4\pi$, indem Sie f, p und $|f-p|$ in ein Diagramm zeichnen.

Bestimmen Sie in einer weiteren Rechnung für $m+1 = 2, \dots, 100$ Stützstellen speziell das m, für das der Fehler e_m minimal wird und zeichnen Sie die Fehler logarithmisch in Abhängigkeit von m. Interpretieren Sie auch diese Ergebnisse.

Hinweis: Ihrer Ergebnisse können Sie mit Hilfe der GUI: *Interpolation* überprüfen, die in den NUMLAB-GUIs enthalten ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 9: (Polynominterpolation, Newtonsche Darstellung)

(a) Zeigen Sie, dass es zu den vorgegebenen Stützstellen $t_0 < t_1 < ... < t_m$ und den vorgegebenen Werten $s_i, r_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \dots, m$ genau ein Polynom p vom Grad $\leq 2m+1$ gibt mit

$$p(t_i) = s_i,\ p'(t_i) = r_i \quad (i = 0, \dots, m). \tag{1}$$

Hinweis: Man überlege sich, dass es genügt, aus (1) mit $s_i = r_i = 0$ $(i = 0, \dots, m)$ und $p \in \mathcal{P}_{2m+1}$ wie bei der gewöhnlichen Polynominterpolation $p = 0$ zu folgern.

(b) Geben Sie im Fall $m = 1$ die Newtonsche Darstellung

$$p(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^2(t - t_1)$$

dieses Polynoms explizit an.

(6 Punkte)