Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 4
06.05.2010

Abgabe: Freitag, 14.05.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 10: (Eigenschaften von Bézier-Kurven)
Sei $b(\cdot, b_0, \ldots, b_k) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ die durch die $k+1$ Punkte $b_0, \ldots, b_k \in \mathbb{R}^n$ gegebene Bézier-Kurve. Zeigen Sie:

(a) Affine Invarianz: Ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affin lineare Abbildung, so ist

$$F(b(\cdot, b_0, b_1, \ldots, b_k)) = b(\cdot, F(b_0), F(b_1), \ldots, F(b_k)).$$

(b) Bézier-Kurve liegt in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte: Es gilt

$$b(\cdot, b_0, b_1, \ldots, b_k) \subset \mathrm{co}(b_0, b_1, \ldots, b_k),$$

wobei $\mathrm{co}(b_0, b_1, \ldots, b_k)$ die konvexe Hülle der Punkte $b_0, b_1, \ldots, b_k$ bezeichnet.

(c) Für $u, v \in \mathbb{R}^n$ sei die affin lineare Abbildung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$F(t) := u + tv, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Begründen Sie allein mit den Ihnen bekannten Eigenschaften von Bézier-Kurven (ohne Berechnung durch den de Casteljau-Algorithmus und ohne Verwendung der Darstellung mit Bernsteinpolynomen) den Verlauf von

$$b(\cdot, b_0, \ldots, b_k)$$

für die speziellen Daten

$$b_i = F(t_i) \quad \text{für} \quad i = 0, \ldots, k,$$

wobei $t_0 < t_k$ und $t_i \in (t_0, t_k)$ für $i = 1, \ldots, k-1$.

(6 Punkte)

Aufgabe 11: (Konvergenzgeschwindigkeit der Bézier-Approximation)
Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ hölderstetig zum Exponenten $\alpha \in (0,1]$, d. h.

$$\exists\, C_H = C_H(\alpha) > 0\ \forall\, x_1, x_2 \in [0,1] : \quad \|f(x_1) - f(x_2)\|_2 \leqslant C_H \cdot |x_1 - x_2|^\alpha \,,$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Weiter sei $b(\cdot, f(t_0), \ldots, f(t_k))$ die durch die $k+1$ Punkte $f(t_0), \ldots, f(t_k)$ gegebene Bézier-Kurve, wobei die $t_i := \frac{i}{k}$ für $i = 0, \ldots, k$ die äquidistanten Stützstellen des Intervalls $[0,1]$ bezeichnen.
Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$\forall\, \alpha \in (0,1]\ \exists\, C = C(\alpha) > 0\ \forall\, k \in \mathbb{N} : \quad \|f(\cdot) - b(\cdot, f(t_0), \ldots, f(t_k))\|_{[0,1]} \leqslant C \cdot k^{-\frac{\alpha}{2}},$$

wobei $\|g\|_{[0,1]} := \sup_{t \in [0,1]} \|g(t)\|_2$.

(6 Punkte)

Aufgabe 12: (Programmieraufgabe, Bézier-Kurven, Bernsteinpolynome)
Betrachten Sie die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(t) := \frac{(8\pi t - 4\pi)^2 \cdot \sin(32\pi t)}{10}$$

und die Datenpaare

$$b_i := (t_i, s_i)^T \quad \text{mit} \quad t_i := \frac{i}{m} \quad \text{und} \quad s_i := f(t_i) \quad \text{für} \quad i = 0, \ldots, m,$$

wobei $m+1$ die Anzahl der äquidistanten Stützstellen des Intervalls $[0,1]$ bezeichnet.

(a) Schreiben Sie ein Programm zur Approximation der Funktion f mit Hilfe von Bézier-Kurven, das die Darstellung der Bézier-Kurven mit Bernsteinpolynomen verwendet.

(b) Testen Sie Ihr Programm für die Parameterwerte $m = 10, 100, 1000$ und plotten Sie $f(t)$, $b(t, b_0, \ldots, b_m)$ sowie den Fehler $f(t) - b(t, b_0, \ldots, b_m)$ für $t \in [0,1]$.

Hinweis: Vergleichen Sie Ihre Resultate mit der NUMLAB-GUI: *Approximation mit Bézier-Kurven*.

(6 Punkte)