Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 5
11.05.2010

Abgabe: Donnerstag, 20.05.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 13: (Numerische Differentiation, Interpolatorischer Ansatz)
Sei

$$\ell_m(f) = \sum_{j=0}^{m} w_j f(t_j), \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ glatt}$$

die interpolatorische Differentiationsformel für $f'(0)$ zu den paarweise verschiedenen Stützstellen t_j für $j = 0, \ldots, m$, wobei $w_j := L_j'(0)$.
Man zeige:

(a) Liegen die Stützstellen symmetrisch zur 0, d. h.

$$t_{m-j} = -t_j, \quad j = 0, \ldots, m, \tag{1}$$

so gilt $w_j = -w_{m-j}$ für $j = 0, \ldots, m$.

(b) Ist zusätzlich m ungerade, so stimmt die Differentiationsformel ℓ_m überein mit der interpolatorischen Differentiationsformel

$$\widetilde{\ell}_{m+1}(f) = \sum_{j=0}^{m+1} \widetilde{w}_j f(t_j)$$

zu den Stützstellen $t_0, \ldots, t_m$ aus Aufgabenteil (a) und der zusätzlichen Stelle $t_{m+1} = 0$.
Hinweis: Man zeige als Zwischenschritt, dass zwei Differentiationsformeln

$$\ell_m^{(i)}(f) = \sum_{j=0}^{m} w_j^{(i)} f(t_j)$$

mit $i = 1, 2$ zu den gleichen, paarweise verschiedenen Stützstellen $t_0, \ldots, t_m$ bereits übereinstimmen müssen, falls $\ell_m^{(1)}$ und $\ell_m^{(2)}$ Polynome vom Grad m exakt differenzieren.

(c) Folgern Sie aus Aufgabenteil (b), dass $\ell_m(f)$ (mit den symmetrischen Stützstellen (1)) in diesem Fall Polynome bis zum Grad $m+1$ an der Stelle $\bar{t}=0$ exakt differenziert, d. h.

$$\ell_m(f) = f'(0) \quad \forall f \in \mathcal{P}_{m+1}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 14: (Programmieraufgabe, Numerische Differentiation, Höhere Ableitungen)
Wir wollen mit Hilfe des Computers das Verhalten der numerischen Approximation höherer Ableitungen untersuchen.
Für $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\bar{t}\in(a,b)$ und Stützstellen $t_0,\ldots,t_m\in[a,b]$ haben wir in der Vorlesung bereits gesehen, dass die zugehörige interpolatorische Differentiationsformel $\ell_{m,m}(f)$ folgende Beziehung erfüllt

$$\ell_{m,m}(f) = m!\, a_m. \tag{2}$$

Dabei bezeichnet $a_m = d_{m,m}$ die m-te dividierte Differenz, siehe Kapitel 3.4 im Skript.

(a) Implementieren Sie mit Hilfe von (2) für $m=1,\ldots,6$ die Differentiationsformeln $\ell_{m,m}$ für $f(t)=\sin(t)$ zu den Daten $\bar{t}=\frac{1}{2}$,

$$t_0 = \bar{t}-h, \quad t_m = \bar{t}+h$$

und äquidistant verteilten Zwischenstellen t_i für $i=1,\ldots,m-1$.

(b) Zeichnen Sie für jedes m den Fehler

$$|\ell_{m,m}(f) - f^{(m)}(\bar{t})|$$

in Abhängigkeit von h zu den Werten $h=10^{-8+j}$, $j=0,\ldots,8$ in ein doppelt logarithmisches Diagramm.

(c) Vergleichen Sie die Plots und kommentieren Sie die Ergebnisse.

(6 Punkte)