Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 6
20.05.2010

Abgabe: Donnerstag, 27.05.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 15: (Numerische Integration, Newton-Cotes-Formeln)

(a) Wir wollen zunächst eine allgemeine Quadraturformel entwickeln. Bestimmen Sie $w_0, w_1 \in \mathbb{R}$ und $t_0, t_1 \in (-1,1)$, $t_0 < t_1$ so, dass

$$Q(f) = w_0 f(t_0) + w_1 f(t_1)$$

eine Quadraturformel darstellt, die Polynome vom Grad 3 exakt integriert, also

$$Q(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt \quad \text{für } f \in \mathcal{P}_3.$$

Zeigen Sie, dass mit dieser Formel Polynome vom Grad 4 im Allgemeinen nicht exakt integriert werden.

(b) Sei nun speziell die Newton-Cotes-Formel zu $m+1$ Stützstellen für $\int_a^b f(t)\,dt$ gegeben durch

$$Q_m(f) = h \sum_{i=0}^{m} \sigma_i^m f(t_i).$$

Zeigen Sie, dass

- die Koeffizienten symmetrisch sind, d. h. $\sigma_i^m = \sigma_{m-i}^m$ für $i = 0, \ldots, m$.
- Q_m für geradzahlige m Polynome vom Grad $m+1$ exakt integriert.

Stellt Q aus Aufgabenteil (a) eine Newton-Cotes-Formel dar?

(6 Punkte)

Aufgabe 16: (Programmieraufgabe, Adaptives Quadraturverfahren)
Das folgende Integral soll numerisch approximiert werden

$$\int_{-4}^{2} f(t)\,dt, \quad f(t) = -\frac{\pi^3 t}{(t^2+1)^2}\cos\left(\frac{25}{t^2+1}\right) + 5.$$

(a) Implementieren Sie dazu das adaptive Quadraturverfahren, dessen Pseudocode im Skript auf Seite 103 aufgeführt ist. Als Schätzung für das Integral verwenden Sie $W = 30$. Als relative Genauigkeit wählen Sie $\varepsilon = 10^{-2}$ bzw. $\varepsilon = 10^{-7}$. Messen Sie, mit Hilfe von `tic`, `toc` in MATLAB, die Zeit, die Ihr Algorithmus benötigt.
Berechnen Sie eine Stammfunktion F von f und verwenden Sie F zur Ausgabe des Approximationsfehlers

$$|F(2) - F(-4) - I_\varepsilon|,$$

wobei I_ε die Approximation durch die adaptive Quadratur mit Genauigkeit ε bezeichnet. Geben Sie den numerischen Wert des Integrals I_ε aus.

(b) Steigern Sie die Effizienz des zuvor implementierten Algorithmus, indem Sie für die lokalen Variablen t, f, i aus dem Pseudocode Speicher vorreservieren (in MATLAB: $t = \text{zeros}(m)$, sinnvollerweise $m > p$). Wiederholen Sie die Berechnung und Zeitmessung wie im Teil (a).

(c) Verwenden Sie den in der Vorlesung vorgestellten rekursiven Algorithmus:

```
function (I) = integral (x, y)
    Simpson = S(x, y)
    if ( |(T(x,y) − Simpson)/W| ≤ ε (y−x)/(b−a) )
        I = Simpson
    else
        I = integral(x, (x+y)/2) + integral((x+y)/2, y)
```

Messen Sie auch hier die Zeit, die der Algorithmus benötigt.

Kommentieren Sie in den Teilen (a)-(c) Ihre Ergebnisse und Laufzeiten.

(6 Punkte)

Aufgabe 17: (Numerische Integration, Gaußsche Quadraturformeln)
Die Gaußschen Quadraturformeln sind eine spezielle Version der interpolatorischen Quadraturformeln, bei denen die Stützstellen besonders geschickt gewählt werden. Sie besitzen auf $[-1, 1]$ die Form

$$Q_m(f) = \sum_{j=1}^{m} w_j f(\rho_j), \quad m \geqslant 1,$$

wobei ρ_j die Nullstellen des m–ten Legendre-Polynoms

$$\mathcal{L}_m(t) = \frac{m!}{(2m)!} \frac{d^m}{dt^m}(t^2 - 1)^m, \quad m \geqslant 0$$

sind und die Gewichte w_j wie üblich gewählt werden.
SATZ: Gaußsche Quadraturformeln integrieren Polynome sogar bis zum Grad $2m - 1$ exakt, das heißt es gilt

$$\forall\, p \in \mathcal{P}_{2m-1}: \quad Q_m(p) = \int_{-1}^{1} p(t)dt.$$

Arbeiten Sie die folgende Beweisskizze des Satzes in allen Einzelheiten aus.

BEWEIS:

(a) Mit Hilfe des Satzes von Rolle sieht man sofort, dass das m–te Legendre-Polynom $\mathcal{L}_m$ genau m paarweise verschiedene Nullstellen

$$\rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_m$$

in $(-1, 1)$ besitzt.

(b) Durch partielle Integration folgt, dass die Polynome $\mathcal{L}_0, \ldots, \mathcal{L}_m$ eine orthogonale Basis von $\mathcal{P}_m$ im folgenden Sinne bilden

$$\int_{-1}^{1} \mathcal{L}_k(t)\mathcal{L}_l(t)dt = 0 \quad \forall\, 0 \leq k < l \leq m.$$

(c) Offensichtlich ist

$$\int_{-1}^{1} \mathcal{L}_m(t) f(t)dt = 0, \ \forall\, f \in \mathcal{P}_{m-1}.$$

(d) Ist nun $p \in \mathcal{P}_{2m-1}$, so lässt sich p trivialerweise schreiben als

$$p(t) = \mathcal{L}_m(t)\, q(t) + r(t),$$

wobei q und r Polynome aus $\mathcal{P}_{m-1}$ sind.

(e) Mit dieser Darstellung von p folgt direkt die behauptete Gleichheit

$$Q_m(p) = \int_{-1}^{1} p(t)dt.$$

(6 Punkte)