Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 7
27.05.2010

Abgabe: Freitag, 04.06.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 18: (Numerische Integration, Newton-Cotes-Formeln)
Sei

$$Q_m(f) = \frac{b-a}{m} \sum_{j=0}^{m} \sigma_j^m f(t_j)$$

die aus der Vorlesung bekannte Newton-Cotes-Formel für $\int_a^b f(t)dt$.

(a) Bestimmen Sie eine Quadraturformel $Q_{m,m}(f)$ für das Doppelintegral

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(s,t)\, ds \right) dt,$$

die auf der zweifachen Verwendung der Newton-Cotes-Formel beruht.

(b) Welche Polynome der Form

$$p(s,t) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} a_{ij} s^i t^j, \quad k,l \in \mathbb{N}_0,\ a_{ij} \in \mathbb{R}$$

werden durch diese Formel exakt integriert?

(c) Welches Ergebnis liefert $Q_{1,1}(f)$ sowie $Q_{2,2}(f)$ im Beispiel

$$\int_0^1 \int_{-1}^5 4t + 2s^3 + 3t^2 s^2\, ds\, dt\ ?$$

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem exakten Integralwert.

(6 Punkte)

Aufgabe 19: (Programmieraufgabe, Numerische Integration, Romberg-Verfahren)

(a) Approximieren Sie die Integrale

$$\int_{t_0}^{3} (t-1)^{\frac{1}{5}}\, dt$$

für $t_0 = 1.2, 1.005, 1$, indem Sie für die numerische Integration das Romberg-Verfahren mit den ersten 10 Trapezsummen ($k = 9$) verwenden.
Wir bezeichnen den Fehler eines Eintrags $T_{n,j}$ des Romberg-Schemas mit

$$e(n, j; t_0) := \left| T_{n,j} - \int_{t_0}^{3} (t-1)^{\frac{1}{5}}\, dt \right|, \quad 0 \leq j \leq n \leq k.$$

Erstellen Sie zu den folgenden numerischen Tests übersichtliche Tabellen:

(i) Berechnen Sie für jedes obige t_0 die Fehler der ersten Spalte des Romberg-Schemas

$$e(n, 0; t_0),\ n = 0, \ldots, k.$$

Geben Sie auch das Verhältnis der Fehler

$$\frac{e(n, 0; t_0)}{e(n+1, 0; t_0)},\ n = 0, \ldots, k-1$$

aus und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der theoretisch zu erwartenden Konvergenzordnung.

(ii) Wiederholen Sie diese Analyse für die 2. Spalte des Romberg-Schemas.

(iii) Berechnen Sie den Fehler der Diagonaleinträge $e(n, n; t_0)$ für jedes t_0 und interpretieren Sie diesen.

(b) Approximieren Sie die maximale Geschwindigkeit aus der ein Auto der Masse 2055kg mit defekten Bremsen bis zum Stillstand abgebremst werden kann. Die zeitabhängige Bremskraft $k(t)$ Newton sei dabei gegeben durch

$$k(t) = 17125 \exp\left(-\frac{\pi}{4} t^2\right).$$

Plotten Sie dazu die Funktion $g(T) = \int_0^T \exp\left(-\frac{\pi}{4} t^2\right)\, dt$. Die numerische Integration soll mit einer geeigneten Trapez- oder Simpsonsumme erfolgen.
Hinweis: Bereits in Aufgabenteil (a) programmierte Routinen dürfen verwendet werden.

(6 Punkte)

Aufgabe 20: (Lineare Gleichungssysteme, LR-Zerlegung, Pivotisierung)
Lösen Sie *von Hand* das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 1.1 & 3.1 \\ 2 & 5.6 & 3.1 \\ 4 & 0.15 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 0.1 \\ 4.45 \end{bmatrix}$$

durch LR-Zerlegung unter Angabe aller Zwischenschritte, einmal mit absoluter Spaltenpivotisierung und einmal ohne Pivotisierung. Verwenden Sie nur dezimale Gleitkommazahlen bzw. -operationen mit der Mantissenlänge 3 und die zugehörige Rundungsvorschrift in jedem Schritt. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung.

(6 Punkte)