Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 9
10.06.2010

Abgabe: Donnerstag, 17.06.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 23: (Programmieraufgabe, Intensitätsverteilungsproblem)
Betrachten Sie die aus der Vorlesung bekannte Integralgleichung für das Intensitätsverteilungsproblem

$$\alpha y(x) + \int_0^{10} K(x,\xi)y(\xi)d\xi = r(x), \quad x \in [0,10],$$

wobei die Einflussfunktion $K : [0,10]\times[0,10] \to \mathbb{R}$ und die rechte Seite $r : [0,10] \to \mathbb{R}$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} K(x,\xi) &:= \max\{0, 1 - |\beta(x-\xi)|\}, \\ r(x) &:= 1 + \cos\left(\frac{5x}{\pi}\right). \end{aligned}$$

Verwenden Sie für die folgenden Berechnungen die Parameter $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{200}$, $\alpha = 0, \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{10}, 1$.

(a) Erstellen Sie zum Lösen des Intensitätsproblems zunächst eine Funktion, die das lineare Gleichungssystem $Ay = c$ erzeugt (vgl. Skript, Abschnitt 7.5). Benutzen Sie bei der Diskretisierung des Integrals die Trapezsumme zur Schrittweite h. Lösen Sie anschließend das lineare Gleichungssystem, indem Sie in einer weiteren Funktion eine LR-Zerlegung mit absoluter Spaltenpivotisierung durchführen. Hinweis: Sie können die LR-Zerlegung aus Aufgabe 21 verwenden.

(b) Plotten Sie die Intensitätsverteilung $y : [0,10] \to \mathbb{R}$ für die obigen Parameter, also insgesamt 8 Plots.

(c) Erweitern Sie die LR-Zerlegung derart, dass zusätzlich die Werte der Pivotelemente zurückgegeben werden. Geben Sie zu den obigen Parametern jeweils das betragsmäßig größte und kleinste Pivotelement aus.

(d) Geben Sie zu den oben angegebenen Parametern jeweils die Konditionszahl der Matrix A aus. Hinweis: `cond(A)`.

(e) Plotten Sie das Belegungsmuster der Matrix A für $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{200}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{10}, 1$. Hinweis: `spy(A)`.

(6 Punkte)

Aufgabe 24: (Gaußsches Eliminationsverfahren, LR-Zerlegung)
Sei $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ mit $m \in \mathbb{N}$. Weiter gelte

$$\exists\, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} \textbf{(1):}\ v_i > 0 & \forall\, i = 1, \ldots, m \\ \textbf{und} & \\ \textbf{(2):}\ |A_{ii}| \cdot v_i > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} |A_{ij}| \cdot v_j & \forall\, i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Zeigen Sie

$$\exists\, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ L_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{m,1} & \cdots & L_{m,m-1} & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} R_{1,1} & \cdots & \cdots & R_{1,m} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & R_{m,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,m} : \quad A = L \cdot R,$$

d. h. die LR-Zerlegung kann ohne Pivotisierung durchgeführt werden.

(6 Punkte)

Aufgabe 25: (Vektor- und Matrixnormen)
Sei $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum mit einer beliebigen Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$.
Zeigen Sie:

(a) $(\mathbb{C}^m, \|\cdot\|_*)$ ist ein normierter Raum versehen mit der Norm

$$\|\cdot\|_* : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}_+ \quad \text{mit} \quad \|z\|_* := \max_{\phi \in [0,2\pi]} \left\| \mathbf{Re}\left(e^{i\phi} z\right) \right\|.$$

(b) $(\mathbb{C}^m, \|\cdot\|_*)$ ist eine Fortsetzung von $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$, d. h.

$$\|z\|_* = \|z\| \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m.$$

(c) Die durch $\|\cdot\|_*$ induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_{M,*}$ ist eine Fortsetzung der durch $\|\cdot\|$ induzierten Matrixnorm $\|\cdot\|_M$, d. h.

$$\|A\|_{M,*} = \|A\|_M \quad \forall\, A \in \mathbb{R}^{m,m} \subset \mathbb{C}^{m,m}.$$

(6 Punkte)