Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 10
17.06.2010

Abgabe: Donnerstag, 24.06.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 26: (Invertierbarkeit von Matrizen)

(a) Seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $A \in \mathbb{K}^{m,m}$ invertierbar und $u, v \in \mathbb{K}^m$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $B := A + uv^T$ ist invertierbar.

(ii) $\alpha := 1 + v^T A^{-1} u \neq 0$.

Hinweis: Für $\alpha \neq 0$ gilt die Formel $B^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\alpha}\left(A^{-1}uv^T A^{-1}\right)$.

(b) Sei $A = (A_{ij})_{i,j=1,\ldots,m} \in \mathbb{R}^{m,m}$ mit

$$A_{ij} = \begin{cases} 2 & , i = j = 1 \\ 3 & , i = j,\ i = 2, \ldots, m \\ 1 & , i + 1 = j,\ i = 1, \ldots, m-1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

und $E = (E_{ij})_{i,j=1,\ldots,m} \in \mathbb{R}^{m,m}$ mit zufälligen Einträgen $E_{ij} \in [-1, 1]$.

(iii) Bestimmen Sie die Inverse A^{-1}.

(iv) Berechnen Sie die Spaltensummennorm $\|A^{-1}\|_1$ von A^{-1}.

(v) Untersuchen Sie die Invertierbarkeit von $B_h := A + hE \in \mathbb{R}^{m,m}$ für $h \geqslant 0$.
Hinweis: Verwenden Sie das Banach-Lemma sowie (iii) und (iv).

(vi) Geben Sie eine obere Schranke $\bar{h}$ in Abhängigkeit von m an, so dass B_h für $h \in [0, \bar{h}]$ invertierbar ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 27: (Programmieraufgabe, Gesamtschrittverfahren, LR-Zerlegung)
Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$B_h y = b. \tag{1}$$

Hierbei sei $B_h := A + hE \in \mathbb{R}^{m,m}$ mit den Matrizen A und E aus Aufgabe 26 (b), $b := (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$ und $m = 1200$. Die Störung E sei wie oben zufällig gewählt (vgl. Hinweis) und die Größe der Störung sei $h = \frac{1}{1200}$ bzw. $h = \frac{1}{9}$.

(a) Implementieren Sie das Gesamtschrittverfahren (GSV), indem Sie eine Funktion der Form

$$[y, iter] = \texttt{GSV}(A, b, eps)$$

erzeugen. Verwenden Sie dabei zu der gegebenen Toleranz $\varepsilon > 0$ die Abbruchbedingung

$$\|y_{n+1} - y_n\|_1 \leqslant \varepsilon.$$

(b) Berechnen Sie mit dem Gesamtschrittverfahren eine Approximation y_{GSV} der Lösung von (1) und geben Sie die Anzahl der benötigten Iterationen des Gesamtschrittverfahrens aus. Verwenden Sie dazu die Toleranz $\varepsilon = 10^{-6}$ bzw. $\varepsilon = 10^{-12}$.

(c) Berechnen Sie mit der LR-Zerlegung (vgl. Aufgabe 18 bzw. Skript) insgesamt drei Approximationen $y_{\text{LR},1}, y_{\text{LR},2}, y_{\text{LR},3}$ der Lösung von (1) ($y_{\text{LR},1}$ ohne Pivotisierung, $y_{\text{LR},2}$ absolute Spaltenpivotisierung, $y_{\text{LR},3}$ relative Spaltenpivotisierung).

(d) Messen Sie die Laufzeiten für die einzelnen Berechnungen. Hinweis: `tic`, `toc`.

(e) Vergleichen Sie die Güte der Approximation

$$\|y - \bar{y}\|_1$$

zwischen den Lösungen $y \in \{y_{\text{GSV}}, y_{\text{LR},1}, y_{\text{LR},2}, y_{\text{LR},3}\}$ und der von Matlab gelieferten Lösung $\bar{y} = B_h \backslash b$.

(f) Interpretieren Sie die erhaltenen Ergebnisse.

Hinweis: Zur besseren Vergleichbarkeit der Lösungen verwenden Sie (in MATLAB) folgenden Programmcode zum Aufbau von E:

```
rand('state', 3);
E = 2 * rand(m) - ones(m);
```

Hierdurch wird erreicht, dass die Zufallsmatrix E bei jedem Aufruf die gleichen Einträge besitzt.

(6 Punkte)

Aufgabe 28: (Spezielle Form der LR-Zerlegung, Aufwand)
Sei $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ invertierbar, $u, v \in \mathbb{R}^m$ und

$$\widetilde{A} := \begin{pmatrix} A & u \\ v^T & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1,m+1}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (i) $\widetilde{A}$ ist invertierbar.

  (ii) $v^T A^{-1} u \neq 0$.

(b) Sei $\widetilde{A}$ invertierbar und sei die LR-Zerlegung von A bereits bekannt (d. h. $Ay = c$ kann aufgelöst werden).

  (iii) Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Berechnung der Lösung von

$$\widetilde{A}x = b \tag{2}$$

  an, ohne für $\widetilde{A}$ die LR-Zerlegung berechnen zu müssen.

  (iv) Wie groß ist der Aufwand zur Bestimmung der Lösung von (2), wenn die LR-Zerlegung von A bekannt ist?

(6 Punkte)