Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 11
24.06.2010

Abgabe: Donnerstag, 01.07.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 29: (Kontraktionssatz)
Bestimmen Sie ein geeignetes Intervall D der angegebenen Form, so dass die Voraussetzungen des Kontraktionssatzes für die Fixpunktgleichung

$$x = F(x), \quad x \in D$$

erfüllt sind.

(a) $F(x) = \ln(x) + 2,\ D = [a, 5]$,

(b) $F(x) = \beta \cos^2(x),\ D = [0, a]$ und $\beta \in (0, 1)$,

(c) $F(x) = \operatorname{sech}(x),\ D = [0, a]$.

Zeigen Sie zusätzlich in den Fällen (b) und (c), dass die Iteration $x_{n+1} = F(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dafür überlege man sich, dass diese Iteration nach wenigen Schritten in D landet.

(6 Punkte)

Aufgabe 30: (Fixpunkt-Berechnung, graphische Iteration)
Es seien die folgenden reellen Funktionen gegeben:

(a) $f(x) = \cos(x) + x$,

(b) $f(x) = -x^2 + x + 1$.

(1) Bestimmen Sie die Anzahl der Fixpunkte von f.

(2) Skizzieren Sie für einige charakteristische Startwerte x_0 das Verhalten der Iteration

$$x_{n+1} = f(x_n)\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

mit Hilfe des Graphen von f.

(3) Ein Fixpunkt $\bar{x}$ von $f : \mathbb{R} \subset D \to \mathbb{R}$ heißt **anziehend**, falls es ein Intervall $I = I(\bar{x}) \subset D$ gibt, so dass die Iterationsfolge (1) für $n \to \infty$ und für alle Startwerte $x_0 \in I$ gegen $\bar{x}$ konvergiert. Das maximale Intervall I mit dieser Eigenschaft nennen wir den **Einzugsbereich** des Fixpunktes $\bar{x}$ von f.

Bestimmen Sie für f aus (a) und (b) die Einzugsbereiche der anziehenden Fixpunkte.

Hinweis: Vergleichen Sie Ihre Resultate mit der NUMLAB-GUI: *Stair Case*.

(6 Punkte)

Aufgabe 31: (Intervallhalbierung, Sekanten-Verfahren, Newton-Verfahren)
Es sei die Gleichung

$$\tanh(x) = \frac{1}{2} + \lambda x, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

mit $\lambda \in \{0.1, 0.5\}$ gegeben.

(a) Ermitteln Sie zunächst per Hand die Anzahl der Lösungen sowie geeignete Startwerte für die Intervallhalbierung.

(b) Implementieren Sie die Intervallhalbierung, das Sekanten-Verfahren und das Newton-Verfahren. Hierbei soll die Iteration abbrechen, wenn der Defekt (d. h. der Betrag des Fehlers, der sich nach Einsetzen in (2) ergibt) kleiner als 10^{-10} ist.

(c) Berechnen Sie mit der Methode der Intervallhalbierung und den Startwerten aus (a) die jeweiligen Nullstellen.

(d) Verwenden Sie die gleichen Startwerte wie in (c) zur Berechnung der Nullstellen mittels des Sekanten-Verfahrens.

(e) Berechnen Sie zuletzt die Newton-Folgen gestartet an den jeweiligen Intervallgrenzen.

(f) Geben Sie für alle drei Verfahren die Iterationsfolgen aus.

Hinweis: Vergleichen Sie Ihre Resultate mit der NUMLAB-GUI: *Nullstellen 1D*. Die Intervallhalbierung ist in der GUI nicht implementiert.

(6 Punkte)