Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 12
01.07.2010

Abgabe: Donnerstag, 08.07.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 32: (Newton-Verfahren, Konvergenzordnung, Newton-Iterierte)
Betrachten Sie das (klassische) Newton-Verfahren in der Form

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

das zur Berechnung einer Nullstelle $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ einer gegebenen Funktion $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ dient.

(a) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = x^4$.

- (i) Welche lokale Konvergenzordnung ist hierbei laut allgemeiner Konvergenztheorie zu erwarten?
- (ii) Geben Sie die Newton-Iterierten $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zum Startwert $x_0 = 1$ explizit an.
- (iii) Bestimmen Sie die Konvergenzordnung der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Sei $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$F(x) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & & \\ 2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 2 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \sin(x_m) \\ \sin(x_{m-1}) \\ \vdots \\ \sin(x_1) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

- (i) Geben Sie das im Newton-Verfahren auftretende lineare Gleichungssystem für diese Funktion explizit an.
- (ii) Untersuchen Sie, ob die LR-Zerlegung ohne Pivotisierung ausgeführt werden kann.

(6 Punkte)

Aufgabe 33: (Programmieraufgabe, Zellmodell, Newton-Verfahren)
Betrachten Sie das folgende nichtlineare Gleichungssystem, das den stationären Zustand eines Systems diffusiv gekoppelter chemischer Zellen beschreibt:

$$-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1} = \lambda g(y_i), \quad i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

mit $g(y) = \exp\left(\frac{y}{1+2y}\right)$ (exotherme Reaktion) und $y_0 = y_{m+1} = 1$.

(a) Implementieren Sie das Newton-Verfahren sowie das vereinfachte Newton-Verfahren. Hierbei soll die Iteration abbrechen, wenn der maximale Defekt $\|F(y^n)\|_\infty$ kleiner als 10^{-5} ist, wobei y^n der n–te Iterationsvektor ist und das Gesamtsystem als $F(y) = 0$ geschrieben wird. Verwenden Sie als Startvektor für die Iteration jeweils den Nullvektor und zum Lösen des lineare Gleichungssystems die MATLAB interne Routine $A\backslash b$.

(b) Lösen Sie mit jedem der beiden Verfahren aus (a) die nichtlineare Gleichung (1) für $(\lambda, m) = (0.1, 100)$, $(\lambda, m) = (0.5, 100)$ und $(\lambda, m) = (10^{-7}, 100000)$ (`sparse` verwenden).

(c) Messen Sie die Rechenzeit bei allen sechs Berechnungen.

(d) Geben Sie jeweils die Anzahl der Iterationen aus.

(e) Erzeugen Sie abschließend jeweils einen Plot der Näherungslösung (6 Plots).

(6 Punkte)

Aufgabe 34: (Newton-Richtung ist Abstiegsrichtung)
Sei $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Weiter gelte:

$$\exists\, \bar{x} \in \mathbb{R}^m : \quad F(\bar{x}) \neq 0 \quad \text{und} \quad F'(\bar{x}) \text{ ist invertierbar.}$$

Setze $d := -F'(\bar{x})^{-1}F(\bar{x})$. Zeigen Sie:

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 : \quad \|F(\bar{x} + \varepsilon d)\| < \|F(\bar{x})\| \quad \forall\, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Dies bedeutet, dass der Defekt in der Newton-Richtung abnimmt.

(6 Punkte)

Bonusaufgabe 35: (Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens)
Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $F \in C^4(J, \mathbb{R})$ und $\bar{x} \in J$ eine doppelte Nullstelle von F, d. h. $\bar{x}$ erfüllt

$$F(\bar{x}) = 0,\ F'(\bar{x}) = 0,\ F''(\bar{x}) \neq 0.$$

Man zeige, dass das Newton-Verfahren lokal mindestens linear konvergent bei $\bar{x}$ ist. **Hinweis:** Man verwende die Regel von l'Hospital.

(6 Bonuspunkte)