Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 13
08.07.2010

Abgabe: Donnerstag, 15.07.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 36: (Programmieraufgabe, Ausgleichsproblem)
Gegeben seien m Datenpaare $(t_k, s_k)_{k=1,\ldots,m}$, die wie folgt konstruiert werden:

$$t_k = \frac{2\pi(k-1)}{m-1}, \quad s_k = \frac{t_k^2 \sin(4t_k)}{10}, \quad k = 1, \ldots, m, \quad m = 100.$$

(a) Bestimmen Sie zu diesen Daten das Ausgleichspolynom vom Grad 19, d. h.

$$f(t) = \sum_{i=1}^{p} a_i t^{i-1} \quad \text{mit} \quad p = 20$$

durch

(i) Lösen der Normalgleichung

$$A^T A y = A^T b.$$

Geben Sie auch die Kondition der Gramschen Matrix $A^T A$ aus (in MATLAB `cond`-Befehl).

(ii) Lösen des Ausgleichsproblems unter Verwendung der QR-Zerlegung. Hierbei können Sie auf die MATLAB-Funktion `qr` zurückgreifen.

(b) Geben Sie jeweils die Minimal- und Standardabweichung aus.

(c) Plotten Sie beide Ausgleichsfunktionen zusammen mit den Messdaten in eine Abbildung.

(d) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

(6 Punkte)

(e) **Zusatz 1**: Implementieren Sie die QR-Zerlegung nach Householder und plotten Sie die Lösung zusammen mit denen aus Aufgabenteil (c).

(3 Bonuspunkte)

(f) **Zusatz 2**: Berechnen Sie das Interpolationspolynom (für $m = 20$, $p = 20$) sowie das Ausgleichspolynom (für $m = 100$, $p = 20$) jeweils vom Grad 19 mit der NUMLAB-GUI: Interpolation und erzeugen Sie einen Screenshot. Mit welcher Methode löst die GUI das Ausgleichsproblem?

(2 Bonuspunkte)

Aufgabe 37: (Nicht-Eindeutigkeit der QR-Zerlegung)
Sei $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ nicht-singulär und seien zwei Zerlegungen

$$A = Q_1 R_1 \quad \text{und} \quad A = Q_2 R_2$$

mit orthogonalen Matrizen Q_1, Q_2 und rechten oberen Dreiecksmatrizen R_1, R_2 gegeben. Zeigen Sie:

$$\exists\, D \in \mathbb{R}^{m,m} \text{ Diagonalmatrix mit } |D_{i,i}| = 1 \;\forall\, i = 1, \dots, m : \begin{cases} \text{(1): } Q_1 = Q_2 D \\ \text{und} \\ \text{(2): } R_1 = D R_2. \end{cases}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 38: (Normalgleichung bezüglich w-Norm)
Gegeben sei ein Vektor $w = (w_1, \dots, w_m)^T \in \mathbb{R}^m$ mit $w_i > 0$ für $i = 1, \dots, m$.

(a) Weisen Sie nach, dass durch

$$\|x\|_w = \left(\sum_{i=1}^{m} w_i x_i^2 \right)^{1/2}, \; x \in \mathbb{R}^m$$

eine Norm im $\mathbb{R}^m$ definiert ist.

(b) Zeigen Sie, dass das lineare Ausgleichsproblem bezüglich dieser gewichteten Norm

$$\|Ay - b\|_w \stackrel{!}{=} \text{ Minimum über } y \in \mathbb{R}^p$$

für ein gegebenes $b \in \mathbb{R}^m$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,p}$, $m \geqslant p$ mit $\text{Rang}(A) = p$ genau eine Lösung besitzt.

(c) Geben Sie die zugehörige Normalgleichung an.

(6 Punkte)