

Übungen zur Vorlesung Numerik I

Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Zur Prüfungsvorbereitung: Übungsblatt 14
15.07.2010

Abgabe: Donnerstag, 22.07.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Besprechung: In der Sprechstunde des jeweiligen Tutors.

Aufgabe 39: (Rundungsfehler und Fehlerfortpflanzung)

- (a) Erläutern Sie mit Ihren eigenen Worten, wodurch Rundungsfehler entstehen können und was man unter dem Begriff *unvermeidbarer Fehler* versteht.
- (b) Bestimmen Sie die relative komponentenweise Konditionszahl $\hat{\kappa}(F, x)$ für das Auswertungsproblem $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) = \sqrt{2x}$.

Aufgabe 40: (Interpolation)

- (a) Formulieren Sie das allgemeine Interpolationsproblem. Welche Arten von Ansatzfunktionen haben Sie kennengelernt?
- (b) Erläutern Sie die Idee des Horner-Schemas. Was können Sie über die Anzahl der Funktionsauswertungen und den Aufwand aussagen?
- (c) Formulieren Sie den Existenz- und Eindeutigkeitsatz der Polynominterpolation und skizzieren Sie den Beweis.
- (d) Berechnen Sie das Interpolationspolynom p , das durch die Punkte $(-4, 1)$, $(-1, 5)$ und $(3, -2)$ verläuft
 - (i) unter Verwendung der Lagrangeschen Basispolynome.
 - (ii) in der Newtonschen Darstellung unter Verwendung der dividierten Differenzen.
- (e) Geben Sie die Newtonsche Darstellung eines Polynoms allgemein an und leiten Sie das Schema der dividierten Differenzen her. Veranschaulichen Sie die Aussage des Satzes von Aitken.
- (f) An welcher Stelle des Intervalls ist der Interpolationsfehler der Polynominterpolation erfahrungsgemäß am größten?

Aufgabe 41: (Bézier-Kurven)

- (a) Was ist eine Bézier-Kurve und welche Eigenschaften besitzen diese Kurven?
- (b) Berechnen Sie die Bézier-Kurve, die durch die 3 Punkte $b_0 = (1, 0)^T$, $b_1 = (2, 0)^T$ und $b_2 = (1, 1)^T$ bestimmt wird, unter Verwendung des Algorithmus von de Casteljau.
- (c) Geben Sie die Definition der Bernsteinpolynome an und führen Sie die Eigenschaften dieser Polynome auf. Formulieren Sie die *Teilung der Eins* Eigenschaft und beweisen Sie diese.
- (d) Wodurch ist der Zusammenhang zwischen den Bézier-Kurven und den Bernsteinpolynomen gegeben?
- (e) Formulieren Sie den Konvergenzsatz der Bézier-Approximation für hölderstetige Funktionen und skizzieren Sie den Beweis.

Aufgabe 42: (Numerische Differentiation)

- (a) Konstruieren Sie Differentiationsformeln unter Verwendung des interpolatorischen Ansatzes.
- (b) Geben Sie die Fehlerabschätzungen sowohl für den vorwärts genommenen als auch für den zentralen Differenzenquotienten an und skizzieren Sie den Beweis. Worin liegen die Hauptunterschiede dieser Abschätzungen?
- (c) Welches Phänomen tritt bei der numerischen Differentiation beim Grenzübergang $h \rightarrow 0$ auf? Wie können Sie die Schrittweite h beim vorwärts genommenen Differenzenquotienten optimal wählen, so dass der Fehler der numerischen Approximation minimal wird?
- (d) Welchen Ansatz wählt man bei der numerischen Approximation höherer Ableitungen?

Aufgabe 43: (Numerische Integration)

- (a) Welche Verfahren zur numerischen Integration haben Sie in der Vorlesung kennengelernt?
- (b) Geben Sie zur Approximation von $\int_a^b f(t)dt$ für eine Funktion $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ die (abgeschlossenen) Newton-Cotes-Formeln $Q_m(f)$ an. Was können Sie hierbei über die Lage der Stützstellen aussagen? Bekanntlich gilt

$$Q_m(f) \approx \int_a^b f(t)dt.$$

Was bedeutet in diesem Zusammenhang *Exaktheit* und unter welchen Bedingungen integriert die interpolatorische Quadraturformel Q_m die Funktion f exakt? Was bedeutet diese Exaktheitseigenschaft, wenn wir das Integral

$$\int_{-2}^2 3x^2 + 2x + 3 dx$$

mit der Trapezregel oder mit der Simpsonregel lösen würden. Wir könnten nun, um die Funktion exakt zu integrieren, den Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ betrachten, aber weshalb ist dieser Ansatz für eine genauere Approximation nicht sinnvoll und welche andere Vorgehensweise wurde in der Vorlesung stattdessen gewählt? Geben Sie die Fehlerdarstellung sowohl für die Trapezsumme als auch für die Simpsonsumme an.

- (c) Erläutern Sie das Romberg-Verfahren und veranschaulichen Sie die Fehlerordnungen im Romberg-Tableau. Welche Fehlerdarstellung haben Sie für das Romberg-Verfahren kennengelernt? Beim Implementieren dieses Verfahrens benötigt man bekanntlich die Anzahl der Stützstellen. Wie würden Sie das Problem mit der Anzahl der Stützstellen beim Romberg-Verfahren angehen?
- (d) Erklären Sie die Idee und Vorgehensweise der adaptiven Quadratur.

Aufgabe 44: (Lineare Gleichungssysteme)

- (a) Welche Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme haben Sie in der Vorlesung kennengelernt? Erläutern Sie das Gaußsche Eliminations-Verfahren. Warum wird die inverse Matrix nie numerisch berechnet?
- (b) Welche Pivotisierungsstrategien haben Sie kennengelernt? Inwiefern stehen die *Wahl des Pivotelements* und die *Stabilität* in Zusammenhang zueinander? Welche Phänomene können unter Umständen auftreten, wenn nicht pivotisiert wird? Betrachte die Gleichung $Ay = b$. Unter welchen Voraussetzungen ist die Gaußsche Elimination mit Pivotisierung und wann sogar ohne Pivotisierung durchführbar?
- (c) Beschreiben Sie die allgemeine Vorgehensweise bei der LR-Zerlegung. Worin liegt der Vorteil der LR-Faktorisierung gegenüber der direkten Gaußschen Elimination? Welche Speichertechnik wurde beim LR-Verfahren angewendet? Welchen Aufwand benötigt die Auflösung der Gleichung $Ay = b$ mittels der LR-Zerlegung?
- (d) Bestimmen Sie die Kondition der Matrizen

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{10^n} & 0 \\ 0 & 10^n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}$$

bezüglich der Spektralnorm $\|\cdot\|_2$ und bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$.

- (e) Formulieren Sie das Banach-Lemma und skizzieren Sie den Beweis.
- (f) Erläutern Sie das Vorgehen beim iterativen Gesamtschrittverfahren. Wie sind M und N hierbei definiert und worauf muss bei der Aufspaltung $A = M - N$ geachtet werden? Unter welcher Bedingung konvergiert das Gesamtschrittverfahren für jeden Anfangswert? Skizzieren Sie den Beweis dieses Satzes und formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

Aufgabe 45: (Nichtlineare Gleichungssysteme)

- (a) Welche Verfahren zum Lösen nichtlinearer Gleichungssysteme haben Sie in der Vorlesung kennengelernt? Welche Verfahren sind nur im eindimensionalen anwendbar?
- (b) Leiten Sie das (mehrdimensionale) Newton-Verfahren her. Worin unterscheiden sich das vereinfachte mit dem üblichen Newton-Verfahren und aus welchem Grund ist es oft besser, das übliche Newton-Verfahren zu verwenden? Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen dem Newton-Verfahren, der numerischen Differentiation und den Ergebnissen zum Lösen linearer Gleichungssysteme.
- (c) Welche Konvergenzordnung besitzt das Newton-Verfahren? Formulieren Sie den Konvergenzsatz des Newton-Verfahrens und geben Sie eine Beweisidee an. Welches Verfahren, das Sie kennengelernt haben, konvergiert schneller als das Newton-Verfahren?

Aufgabe 46: (Lineare Ausgleichsprobleme)

- (a) Erläutern Sie, was man unter dem allgemeinen Ausgleichsproblem versteht.
- (b) Wie löst man das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe der Normalgleichung?
- (c) Formulieren Sie den Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Ausgleichsprobleme und beweisen Sie diesen.
- (d) Unter welcher Bedingung ist das lineare Ausgleichsproblem gut bzw. schlecht konditioniert?
- (e) Wie löst man das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe der QR-Zerlegung?
- (f) Erläutern Sie die Durchführung der QR-Zerlegung nach Householder.

Aufgabe 47: (Nichtlineare Ausgleichsprobleme)

- (a) Worin unterscheidet sich das lineare vom nichtlinearen Ausgleichsproblem? Welche Gestalt besitzt die Normalgleichung im nichtlinearen Fall?
- (b) Konstruieren Sie das Gauß-Newton-Verfahren.
- (c) Beschreiben Sie die Dämpfung dieses Verfahrens.

Aufgabe 48: (Eigenwertaufgaben)

- (a) Beschreiben Sie die Potenzmethode.
- (b) Wie kann der QR-Algorithmus zur Bestimmung von Eigenwerten verwendet werden?