Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 1
15.04.2010

Abgabe: Donnerstag, 22.04.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.

Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 1: (Gleitkommaarithmetik)
Widerlegen Sie für die Gleitkommaoperationen $\tilde{+}$, $\tilde{\cdot}$, $\widetilde{\exp}$, $\widetilde{\cos}$ und $\widetilde{\sin}$ jeweils anhand eines Beispiels die folgenden Eigenschaften

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad (t \,\tilde{+}\, s) \,\tilde{+}\, r = t \,\tilde{+}\, (s \,\tilde{+}\, r)\,, \\
&\text{(b)} \quad t \,\tilde{\cdot}\, (s \,\tilde{+}\, r) = (t \,\tilde{\cdot}\, s) \,\tilde{+}\, (t \,\tilde{\cdot}\, r)\,, \\
&\text{(c)} \quad \widetilde{\exp}\,(t \,\tilde{+}\, s) = \widetilde{\exp}\,(t) \,\tilde{\cdot}\, \widetilde{\exp}\,(s)\,, \\
&\text{(d)} \quad \widetilde{\cos}\,(\alpha) \,\tilde{\cdot}\, \widetilde{\cos}\,(\alpha) \,\tilde{+}\, \widetilde{\sin}\,(\alpha) \,\tilde{\cdot}\, \widetilde{\sin}\,(\alpha) = 1.
\end{aligned}
$$

Hinweis: Verwenden Sie dazu $t, s, r, \alpha \in G(2,10)$, wobei $G(2,10)$ die Menge aller Gleitkommazahlen mit Mantissenlänge 2 zur Basis 10 bezeichnet, sowie die Rundungsvorschrift $\mathrm{rd} : \mathbb{R} \to G(2,10)$ aus der Vorlesung. Werten Sie dabei die Funktionen $\exp$, $\cos$, $\sin$ z. B. mit dem Taschenrechner auf genügend viele Stellen nach dem Komma aus und geben Sie die Zwischenergebnisse an.

(6 Punkte)

Aufgabe 2: (Programmieraufgabe, Rundungsfehler bei Iterationen)
Betrachten Sie zu der Funktion

$$f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto f_{a,b}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ax_1 \\ -(b-a^2)x_1^2 + bx_2 \end{pmatrix}$$

mit $0 < a < 1$ und $b > 1$ die Iterationsvorschrift

$$x^{(n)} = f_{a,b}\left(x^{(n-1)}\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

wobei $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Anfangswert der Form

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} c \\ c^2 \end{pmatrix}$$

mit $c \in \mathbb{R}$ sei.

(a) Untersuchen Sie die durch (1) erzeugten Folgen $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zunächst analytisch hinsichtlich ihres Konvergenzverhaltens

$$\lim_{n\to\infty} \left\|x^{(n)}\right\|_2,$$

indem Sie eine von $x^{(0)}$ abhängige Darstellung für $x^{(n)}$ herleiten. Hinweis: Vollständige Induktion.
(b) Betrachten Sie anschließend speziell für $a = \frac{9}{10}$ und $b = 10$ die durch (1) erzeugten Folgen in Bezug auf ihr numerisches Konvergenzverhalten. Implementieren Sie dazu die gegebene Iteration, zeichnen Sie die ersten 25 Iterationswerte $\tilde{x}^{(n)}$ für den Anfangswert $x^{(0)} = (c, c^2)^T$ mit $c = 0.01$ in ein (x_1, x_2)-Diagramm und verbinden Sie diese der Reihenfolge entsprechend miteinander.
Plotten Sie

$$\left\|\tilde{x}^{(n)}\right\|_2 \text{ über } n = 0, \ldots, 25,$$

indem Sie die y-Achse logarithmisch skalieren. Hinweis: `semilogy`.
(c) Vergleichen Sie das analytische Ergebnis mit dem numerischen und interpretieren Sie diese. Hängt das Ergebnis von der Wahl $c = 0.01$ ab?

(6 Punkte)

Aufgabe 3: (Programmieraufgabe, Rundungsfehler bei Addition)
Gegeben seien die Partialsummen

$$S(n) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

(2) (a) Berechnen Sie die Partialsummen $S(n)$ für $n = 2^j$ und $j = 1, \ldots, 30$ durch vorwärts (d. h. $k = 1, \ldots, n$) und rückwärts (d. h. $k = n, \ldots, 1$) Summation.
(1) Zeichnen Sie die Abweichung

$$\left|\tilde{S}(n) - \lim_{m\to\infty} S(m)\right|$$

der beiden numerischen Approximationen $\tilde{S}(n)$ vom analytischen Grenzwert

$$\lim_{m\to\infty} S(m) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Benutzen Sie dabei einen logarithmischen Maßstab auf beiden Achsen. Begründen
(1) Sie abschließend Ihre Beobachtungen.
(b) Berechnen Sie mit Hilfe der *Rundungsfehler GUI*, die über `Matlab starten` $\rightarrow$ `Start` $\rightarrow$ `Toolboxes` $\rightarrow$ `NUMLAB GUIs` $\rightarrow$ `Rundungsfehler` zu erreichen ist, die Partialsummen $S(n)$ durch vorwärts und rückwärts Summation. Verwenden Sie dazu in der Rundungsfehler GUI die Parameter 1000 für die maximale Anzahl an Schritten und 4 für die Mantissenlänge. Lassen Sie sich die Ausgabe für jeden Schritt anzeigen. Dokumentieren Sie die beiden Ergebnisse jeweils durch
(1)+(1) einen Screenshot.

(6 Punkte)

Aufgabe 1:

zu (a): Sei $t = 0.4$, $s = 0.4$ und $r = 10$, d.h. in Gleitkommadarstellung bzgl. $G(2,10)$ (vgl. (2.3))

$$t = 10^0 \cdot \sum_{j=1}^{2} t_j \cdot 10^{-j} = (0,t_1 t_2) \cdot 10^0 \quad \text{mit} \quad t_1 = 4,\ t_2 = 0$$

$$s = 10^0 \cdot \sum_{j=1}^{2} s_j \cdot 10^{-j} = (0,s_1 s_2) \cdot 10^0 \quad \text{mit} \quad s_1 = 4,\ s_2 = 0$$

$$r = 10^2 \cdot \sum_{j=1}^{2} r_j \cdot 10^{-j} = (0,r_1 r_2) \cdot 10^0 \quad \text{mit} \quad r_1 = 1,\ r_2 = 0$$

Nun gilt

$$
\begin{aligned}
(t \tilde{+} s) \tilde{+} r &\overset{\text{Abs. } 2.3}{=} rd\big(rd(t+s)+r\big) \\
&\overset{\text{Wahl von } t,s,r}{=} rd\Big(rd\big((0,40)\cdot 10^0 + (0,40)\cdot 10^0\big) + (0,10)\cdot 10^2\Big) \\
&= rd\Big(rd\big((0,80)\cdot 10^0\big) + (0,10)\cdot 10^2\Big) \\
&\overset{\text{Def. von } rd \text{ (vgl. (2.5))}}{=} rd\big((0,80)\cdot 10^0 + (0,10)\cdot 10^2\big) \\
&= rd\big((0,008)\cdot 10^2 + (0,10)\cdot 10^2\big) \\
&= rd\big((0,108)\cdot 10^2\big) \\
&\overset{\text{Def. von } rd \text{ (vgl. (2.5))}}{=} (0,10)\cdot 10^2 + 10^{-2}\cdot 10^2 \\
&= 11
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t \tilde{+} (s \tilde{+} r) &\overset{\text{Abs. } 2.3}{=} rd\big(t + rd(s+r)\big) \\
&\overset{\text{Wahl von } t,s,r}{=} rd\Big((0,40)\cdot 10^0 + rd\big((0,40)\cdot 10^0 + (0,10)\cdot 10^2\big)\Big) \\
&= rd\Big((0,40)\cdot 10^0 + rd\big((0,004)\cdot 10^2 + (0,10)\cdot 10^2\big)\Big) \\
&= rd\Big((0,004)\cdot 10^2 + rd\big((0,104)\cdot 10^2\big)\Big) \\
&\overset{\text{Def. von } rd \text{ (vgl. (2.5))}}{=} rd\big((0,004)\cdot 10^2 + (0,10)\cdot 10^2\big) \\
&= rd\big((0,104)\cdot 10^2\big) \\
&\overset{\text{Def. von } rd \text{ (vgl. (2.5))}}{=} (0,10)\cdot 10^2 \\
&= 10
\end{aligned}
$$

zu (b): Sei $t = 2$, $s = 0.4$ und $r = 10$, d.h. in Gleitkommadarstellung bzgl. $G(2,10)$ (vgl. (2.3))

$$t = 10^1 \cdot \sum_{j=1}^{2} t_j \cdot 10^{-j} = (0,t_1 t_2) \cdot 10^1 \quad \text{mit} \quad t_1 = 2,\ t_2 = 0$$

$$s = 10^0 \cdot \sum_{j=1}^{2} s_j \cdot 10^{-j} = (0,s_1 s_2) \cdot 10^0 \quad \text{mit} \quad s_1 = 4,\ s_2 = 0$$

$$r = 10^2 \cdot \sum_{j=1}^{2} r_j \cdot 10^{-j} = (0,r_1 r_2) \cdot 10^2 \quad \text{mit} \quad r_1 = 1,\ r_2 = 0$$

Nun gilt

$$
\begin{aligned}
t \tilde{\cdot} (s \tilde{+} r) &\overset{\text{Abs 2.3}}{=} rd(t \cdot rd(s+r)) \\
&\overset{\text{Wahl von } t,s,r}{=} rd\Big((0,20)\cdot 10^1 \cdot rd\big((0,40)\cdot 10^0 + (0,10)\cdot 10^2\big)\Big) \\
&= rd\Big((0,02)\cdot 10^2 \cdot rd\big((0,004)\cdot 10^2 + (0,10)\cdot 10^2\big)\Big) \\
&= rd\Big((0,02)\cdot 10^2 \cdot rd\big((0,104)\cdot 10^2\big)\Big) \\
&\overset{\text{Def von } rd \text{ (vgl. (2.5))}}{=} rd\big((0,02)\cdot 10^2 \cdot (0,10)\cdot 10^2\big) \\
&= rd\big((0,002)\cdot 10^4\big) \\
&= rd\big((0,20)\cdot 10^2\big) \\
&\overset{\text{Def von } rd \text{ (vgl. (2.5))}}{=} (0,20)\cdot 10^2 \\
&= 20
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t \tilde{\cdot} s \tilde{+} t \tilde{\cdot} r &\overset{\text{Abs 2.3}}{=} rd\big(rd(t\cdot s) + rd(t \cdot r)\big) \\
&\overset{\text{Wahl von } t,s,r}{=} rd\Big(rd\big((0,20)\cdot 10^1 \cdot (0,40)\cdot 10^0\big) + rd\big((0,20)\cdot 10^1 \cdot (0,10)\cdot 10^2\big)\Big) \\
&= rd\Big(rd\big((0,20)\cdot 10^1 \cdot (0,04)\cdot 10^1\big) + rd\big((0,02)\cdot 10^2 \cdot (0,10)\cdot 10^2\big)\Big) \\
&= rd\Big(rd\big((0,008)\cdot 10^2\big) + rd\big((0,002)\cdot 10^4\big)\Big) \\
&= rd\Big(rd\big((0,80)\cdot 10^0\big) + rd\big((0,20)\cdot 10^2\big)\Big) \\
&\overset{\text{Def von } rd \text{ (vgl. (2.5))}}{=} rd\big((0,80)\cdot 10^0 + (0,20)\cdot 10^2\big) \\
&= rd\big((0,008)\cdot 10^2 + (0,20)\cdot 10^2\big) \\
&= rd\big((0,208)\cdot 10^2\big) \\
&\overset{\text{Def von } rd \text{ (vgl. (2.5))}}{=} (0,20)\cdot 10^2 + 10^{-2}\cdot 10^2 \\
&= 21
\end{aligned}
$$

zu (c): Sei $t = 10$ und $s = 0.5$, d.h. in Gleitkommadarstellung bzgl. $G(2,10)$ (vgl. (2.3))

$$t = 10^2 \cdot \sum_{j=1}^{2} t_j \cdot 10^{-j} = (0, t_1 t_2)\cdot 10^2 \quad \text{mit } t_1 = 1,\ t_2 = 0$$

$$s = 10^0 \cdot \sum_{j=1}^{2} s_j \cdot 10^{-j} = (0, s_1 s_2)\cdot 10^0 \quad \text{mit } s_1 = 5,\ s_2 = 0$$

Nun gilt

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\exp}(t \tilde{+} s) &\overset{\text{Abs. 2.3.}}{=} rd\big(\exp(rd(t+s))\big) \\
&\overset{\text{Wahl von } t,s}{=} rd\Big(\exp\big(rd((0,10)\cdot 10^2 + (0,50)\cdot 10^0)\big)\Big) \\
&= rd\Big(\exp\big(rd((0,10)\cdot 10^2 + (0,005)\cdot 10^2)\big)\Big) \\
&= rd\Big(\exp\big(rd((0,105)\cdot 10^2)\big)\Big) \\
&\overset{\text{Def. von } rd \text{ (vgl. (2.5))}}{=} rd\big(\exp((0,1)\cdot 10^2 + 10^{-2}\cdot 10^2)\big) \\
&\overset{\text{exp ausw.}}{=} rd\big((0,59874)\cdot 10^5\big) \\
&\overset{\text{Def. von } rd \text{ (vgl. (2.5))}}{=} (0,59)\cdot 10^5 + 10^{-2}\cdot 10^5 \\
&= 59000 + 1000 \\
&= 60000
\end{aligned}
$$

$$\widetilde{\exp}(t)\,\tilde{\cdot}\,\widetilde{\exp}(s) \overset{\text{Abs. 2.3.}}{=} rd\big(rd(\exp(t))\cdot rd(\exp(s))\big)$$

$$\overset{\text{Wahl von } s,t}{=} rd\Big(rd\big(\exp((0,10)\cdot 10^2)\big)\cdot rd\big(\exp((0,50)\cdot 10^0)\big)\Big)$$

$$\overset{\text{exp ausw.}}{=} rd\Big(rd\big((0,22026)\cdot 10^5\big)\cdot rd\big((0,16487)\cdot 10^1\big)\Big)$$

$$\overset{\text{Def. von rd (vgl. (2.3))}}{=} rd\big((0,22)\cdot 10^5\cdot(0,16)\cdot 10^1\big)$$

$$= rd\big((0,0352)\cdot 10^6\big)$$

$$= rd\big((0,352)\cdot 10^5\big)$$

$$\overset{\text{Def. von rd (vgl. (2.3))}}{=} (0,35)\cdot 10^5$$

$$= 35000$$

<u>zu (d):</u> Sei $\alpha = 0.5$, d.h. in Gleitkommadarstellung bzgl. $G(2,10)$ (Vgl. (2.3))

$$\alpha = 10^0\cdot\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\cdot 10^{-j} = (0,\alpha_1\alpha_2)\cdot 10^0 \text{ mit } \alpha_1 = 5,\ \alpha_2 = 0$$

Nun gilt:

$$\widetilde{\cos}(\alpha)\,\tilde{\cdot}\,\widetilde{\cos}(\alpha)\,\tilde{+}\,\widetilde{\sin}(\alpha)\,\tilde{\cdot}\,\widetilde{\sin}(\alpha) \overset{\text{Abs. 2.3.}}{=} rd\Big(rd\big(rd(\cos(\alpha))\cdot rd(\cos(\alpha))\big) + rd\big(rd(\sin(\alpha))\cdot rd(\sin(\alpha))\big)\Big)$$

$$\overset{\text{Wahl von } \alpha}{=} rd\Big(rd\big(rd(\cos((0,50)\cdot 10^0))\cdot rd(\cos((0,50)\cdot 10^0))\big) + rd\big(rd(\sin((0.50)\cdot 10^0))\cdot rd(\sin((0.50)\cdot 10^0))\big)\Big)$$

$$\overset{\text{sin \& cos ausw.}}{=} rd\Big(rd\big(rd((0,8776)\cdot 10^0)\cdot rd((0,8776)\cdot 10^0)\big) + rd\big(rd((0,4794)\cdot 10^0)\cdot rd((0,4794)\cdot 10^0)\big)\Big)$$

$$\overset{\text{Def. von rd (vgl. (2.3))}}{=} rd\Big(rd\big([(0,87)\cdot 10^0 + \underbrace{10^{-2}\cdot 10^0}_{=(0,01)}]\cdot[(0,87)\cdot 10^0 + \underbrace{10^{-2}\cdot 10^0}_{=(0,01)}]\big) + rd\big([(0,47)\cdot 10^0 + \underbrace{10^{-2}\cdot 10^0}_{=(0,01)}]\cdot[(0,47)\cdot 10^0 + \underbrace{10^{-2}\cdot 10^0}_{=(0,01)}]\big)\Big)$$

$$= rd\Big(rd\big((0,88)\cdot 10^0\cdot(0,88)\cdot 10^0\big) + rd\big((0,48)\cdot 10^0\cdot(0,48)\cdot 10^0\big)\Big)$$

$$= rd\Big(rd\big((0,7744)\cdot 10^0\big) + rd\big((0,96)\cdot 10^0\big)\Big)$$ Fehler!

$$\overset{\text{Def. von rd (vgl. (2.3))}}{=} rd\big((0,77)\cdot 10^0 + (0,96)\cdot 10^0\big)$$

$$= rd\big((0,173)\cdot 10^1\big)$$

$$\overset{\text{Def. von rd (vgl. (2.3))}}{=} (0,17)\cdot 10^1$$

$$= 1,7 \neq 1$$

Aufgabe 2:

(a) Analytisches Konvergenzverhalten:

Aufgrund der Iterationsvorschrift, der Definition von $f_{a,b}$ und der Wahl der Anfangsdaten gilt

$$x^{(n)} = \begin{pmatrix} a^n \cdot c \\ a^{2n} \cdot c^2 \end{pmatrix}, \quad n = 1,2,3,\ldots \quad \forall c \in \mathbb{R}\ \forall a,b \in \mathbb{R}. \qquad (2.1)$$

Daraus erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = \begin{pmatrix} c \cdot \lim_{n\to\infty} a^n \\ c^2 \cdot \lim_{n\to\infty} a^{2n} \end{pmatrix} \overset{0<a<1}{=} \begin{pmatrix} c \cdot 0 \\ c^2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall c \in \mathbb{R}\ \forall 0<a<1\ \forall b \in \mathbb{R}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\|_2 = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}\ \forall 0<a<1\ \forall b \in \mathbb{R}.$$

Analytisch betrachtet konvergiert die Iterationsfolge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ bzgl. der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ gegen 0. Es bleibt die Behauptung (2.1) zu zeigen. Diese lässt sich durch vollständige Induktion über n beweisen:

Beweis von (2.1): Seien $a,b,c \in \mathbb{R}$ mit $0<a<1$ beliebig, aber fest.

Induktionsanfang (IA): $(n=1)$

$$x^{(1)} \overset{\text{Iterations-vorschrift}}{=} f_{a,b}(x^{(0)}) \overset{\text{Definition von } f}{=} \begin{pmatrix} a\, x_1^{(0)} \\ -(b-a^2)(x_1^{(0)})^2 + b\, x_2^{(0)} \end{pmatrix} \overset{\text{Definition der Anfangsdaten}}{=} \begin{pmatrix} a \cdot c \\ -(b-a^2)c^2 + bc^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ a^2 c^2 \end{pmatrix}$$

Induktionsschluss (IS): $(n \longrightarrow n+1)$

$$x^{(n+1)} \overset{\text{Iterations-vorschrift}}{=} f_{a,b}(x^{(n)}) \overset{\text{Definition von } f}{=} \begin{pmatrix} a\, x_1^{(n)} \\ -(b-a^2)(x_1^{(n)})^2 + b\, x_2^{(0)} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Induktionsvoraussetzung (IV)} \hat{=} (2.1)}{=} \begin{pmatrix} a \cdot [a^n \cdot c] \\ -(b-a^2)[a^n \cdot c]^2 + b[a^{2n} \cdot c^2] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{n+1} \cdot c \\ a^{2(n+1)} \cdot c^2 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

(b) Numerisches Konvergenzverhalten: (Siehe m-File & Abbildungen)

Aus der Beobachtung der numerischen Approximation für $a = \frac{9}{10}$, $b = 10$ und für verschiedene Anfangsdaten der Form $x^{(0)} = \begin{pmatrix} c \\ c^2 \end{pmatrix}$ erhalten wir

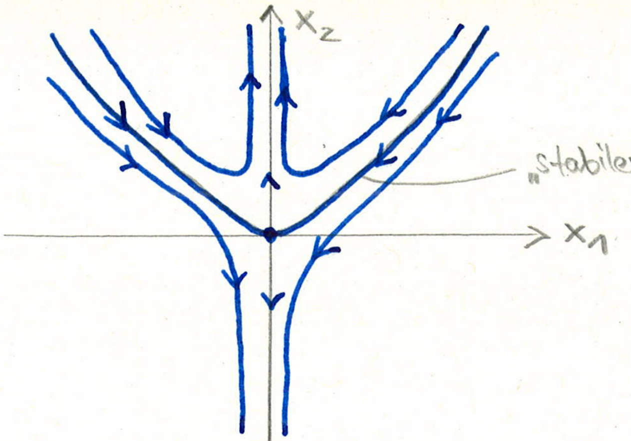
$$\lim_{n\to\infty} \tilde{x}^{(n)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\infty \end{pmatrix}, & c \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & c = 0 \end{cases}$$

und daraus

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{x}^{(n)}\|_2 = \begin{cases} \infty, & c \neq 0 \\ 0, & c = 0 \end{cases}.$$

3. Ergebnisvergleich und Begründung:

Betrachte das folgende Diagramm



Im analytischen Teil haben wir festgestellt, dass unsere Iterationsfolge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen den Punkt $\binom{0}{0}$ konvergiert. Dieses Verhalten ist unabhängig von der Wahl von $c \in \mathbb{R}$, d.h. unabhängig davon, wo genau wir auf dem „stabilen" Zweig mit der Iteration beginnen. Mit anderen Worten können wir diesen Zweig – insofern wir uns darauf befinden – nicht verlassen.

Im numerischen Teil haben wir festgestellt, dass unsere approximierte Iterationsfolge $(\tilde{x}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ nur dann gegen $\binom{0}{0}$ konvergiert, wenn sie bereits darin startet. Für alle weiteren Anfangs= daten $\binom{c}{c^2}$ mit $c \neq 0$ verlässt die Iterationsfolge $(\tilde{x}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ wegen der Rundungsfehler irgendwann (d.h. ab einem $N = N(c) > 0$, $N \in \mathbb{N}$) den stabilen Zweig und divergiert bestimmt gegen $\pm\infty$. Ob diese Abweichung vom stabilen Zweig nach oben oder nach unten statt= findet, ist rein zufällig und hängt mit der Wahl von c zusammen.

Wir stellen somit fest, dass Rundungsfehler zu unerwünschten Ergebnissen führen können.

```
a = 9/10;
b = 10;
c = 0.01;      %Startwert (siehe: Startvektor x(1,:))
n = 2000;      %Anzahl der Iterationen

% Berechnung: exakte Loesung
x=zeros(n,2);
x(1,:)=[c;c^2];
for i=1:n
    x(i+1,:)=[a^i*x(1,1);a^(2*i)*x(1,2)];
end

% Berechnung: numerische Loesung
xn=zeros(n,2);
xn(1,:)=[c;c^2];
for i=1:n
    xn(i+1,:)=[a*xn(i,1);-(b-a^2)*xn(i,1)^2+b*xn(i,2)];
end

% Ausgabe: Verbindungsstrecke der Iterationsfolge
figure
subplot(2,1,1)
plot(x(:,1),x(:,2),'b','LineWidth',2);
xlim([-abs(c) abs(c)])
title('Exakte Iteration')
xlabel('x_1')
ylabel('x_2')
subplot(2,1,2)
plot(xn(:,1),xn(:,2),'r','LineWidth',2);
xlim([-abs(c) abs(c)])
title('Numerische Iteration (doppelte Genauigkeit, G(16,10))')
xlabel('x_1')
ylabel('x_2')

% Berechnung: Abstand zum analytischen Limes (0,0)
z=zeros(n);
zn=zeros(n);
for i=1:n
    z(i)=norm(x(i,:));
    zn(i)=norm(xn(i,:));
end
iter=0:length(z)-1;

% Ausgabe: Abstand zum analytischen Limes
figure
subplot(2,1,1)
loglog(iter,z,'b','LineWidth',2);
title('Exakte Iteration')
xlabel('Iterationen')
ylabel('|Abstand zu (0,0)|')
subplot(2,1,2)
loglog(iter,zn,'r','LineWidth',2);
title('Numerische Iteration (doppelte Genauigkeit, G(16,10))')
xlabel('Iterationen')
ylabel('|Abstand zu (0,0)|')
```

```
figure
semilogy(iter(1:25),zn(1:25),'r','LineWidth',2);
title('Numerische Iteration (doppelte Genauigkeit, G(16,10))')
xlabel('Iterationen')
ylabel('|Abstand zu (0,0)|')
```

Bild 2.1: Verlauf der Iterationsfolge

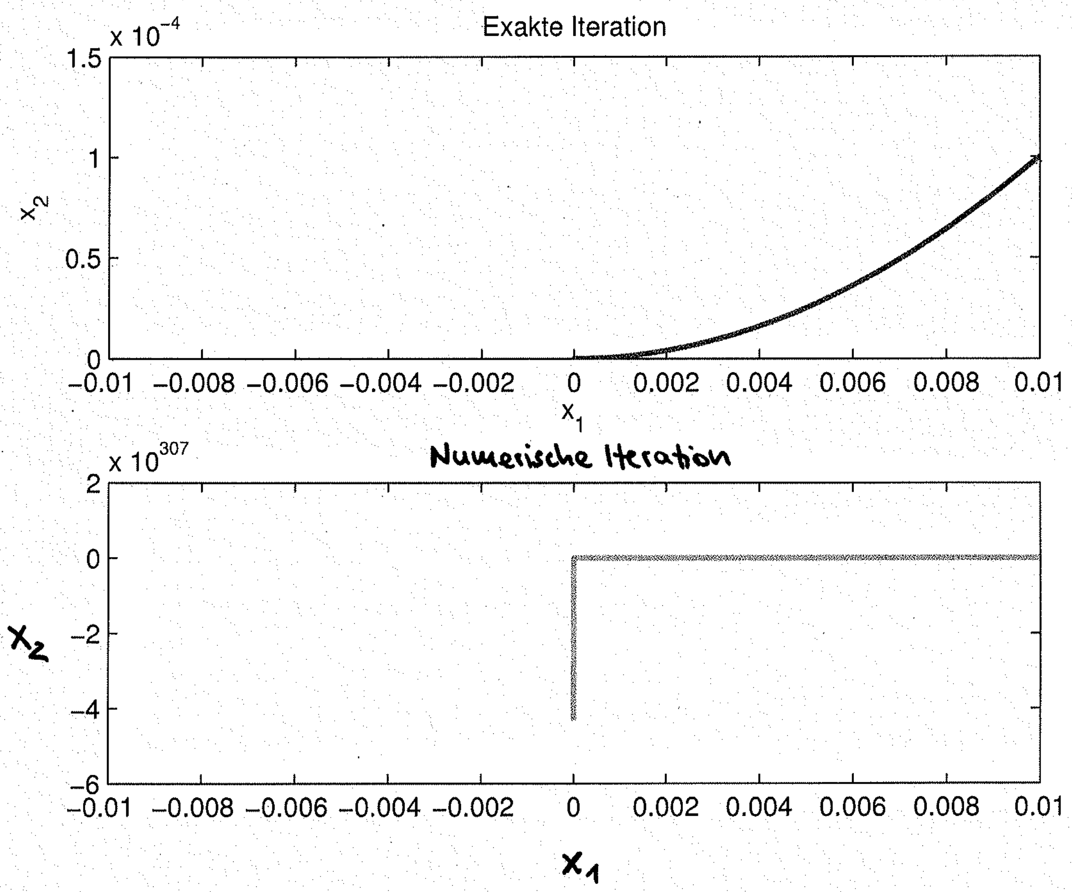


Bild 2.2: Betragsmäßiger Abstand der Iterationsfolge zum analytischen Limes $(0,0)^T$.

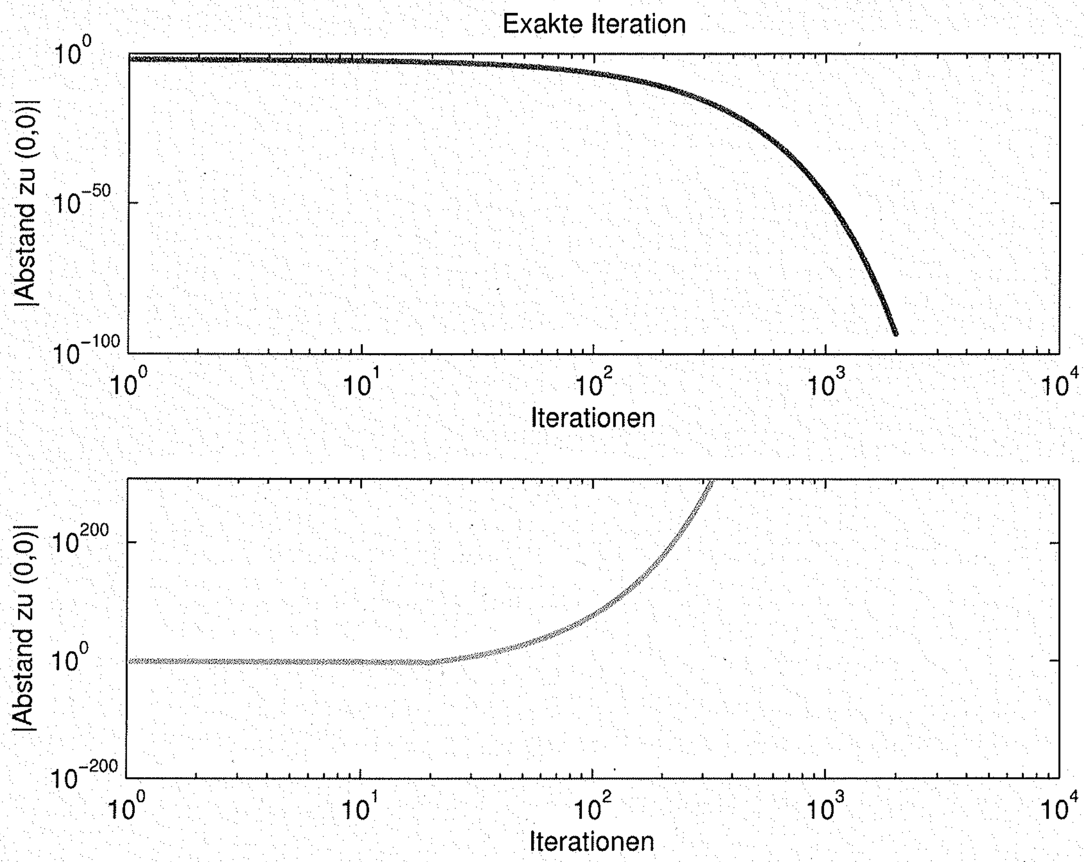
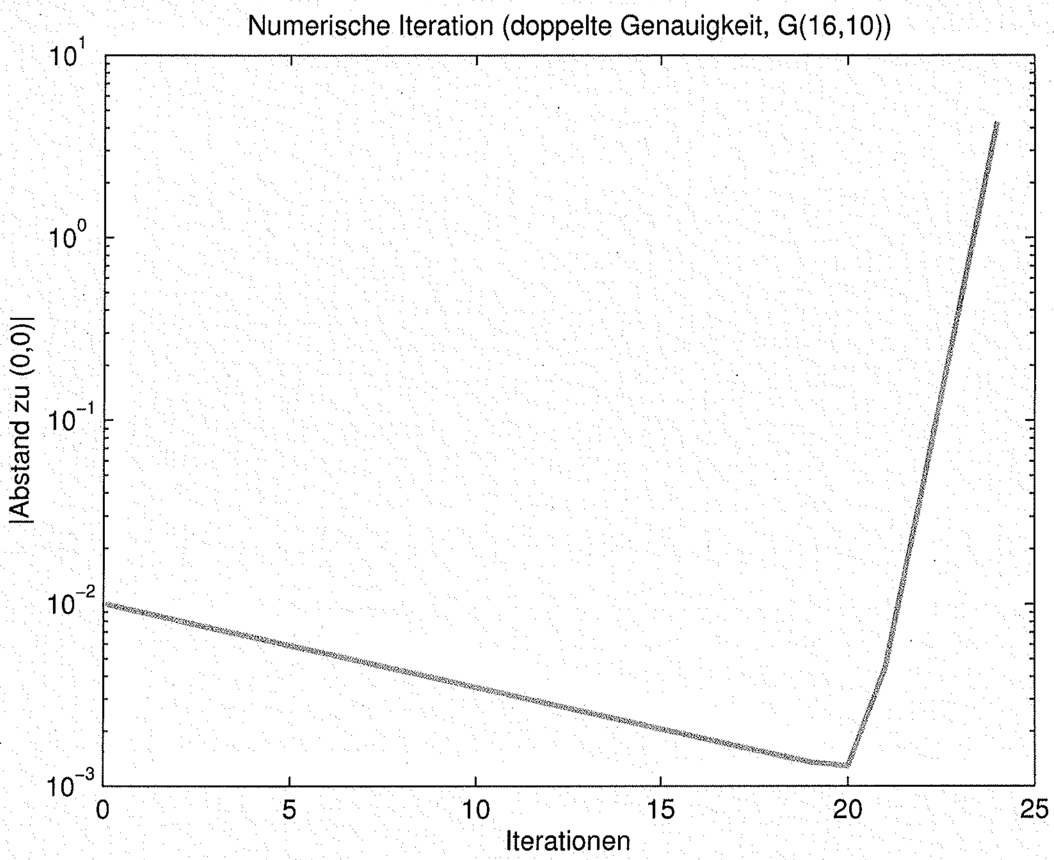


Bild 2.3: Die ersten 25 Glieder des betragsmäßigen Abstands der numerischen Iterationsfolge zum analytischen Limes $(0,0)^T$.



Aufgabe 3:

zu (a): (siehe Quelltext). Man sieht, dass die Rückwärtssummation hier bessere Ergebnisse liefert als die Vorwärtssummation. Dies liegt daran, dass ein Summand betragsmäßig kleiner als Maschinengenauigkeit auf eine Partialsumme der Größenordnung 1 nicht mehr addiert wird. Bei der Rückwärtssummation tritt dieses Phänomen allerdings nicht auf, da kleine Zahlen addiert werden, bevor größere Summanden auftreten. (siehe Abbildung)

zu (b): Vorwärts:

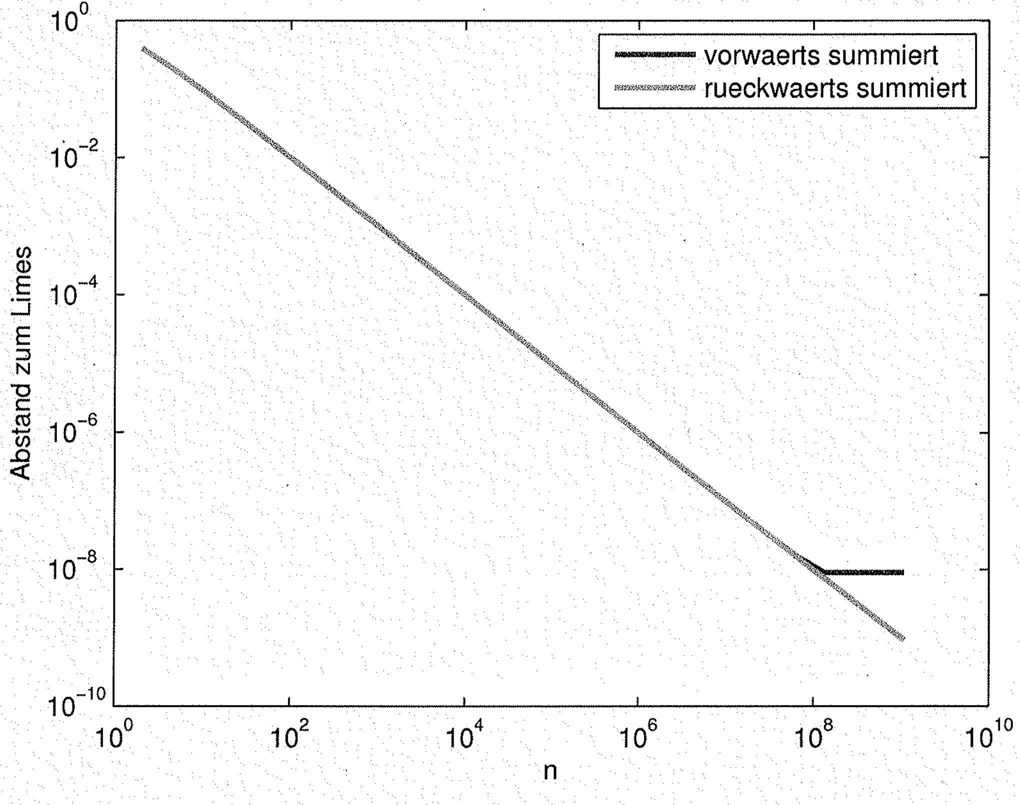
1) Starte die „Rundungsfehler GUI"
3) Stelle die „allgemeinen Parameter" wie auf dem Übungszettel beschrieben ein:
   - maximale Anzahl an Schritten: 1000
   - Mantissenlaenge: 4
   - Ausgabe alle 1 Schritte
2) Wähle unter „Standardbeispiele" die „harmonische Reihe"
4) Unter „Funktion" und dort unter „f(x,n)" trage x(1)+1/n^2 für die quadratische Reihe aus Teil (a) ein.
5) Klicke auf „Berechnen"

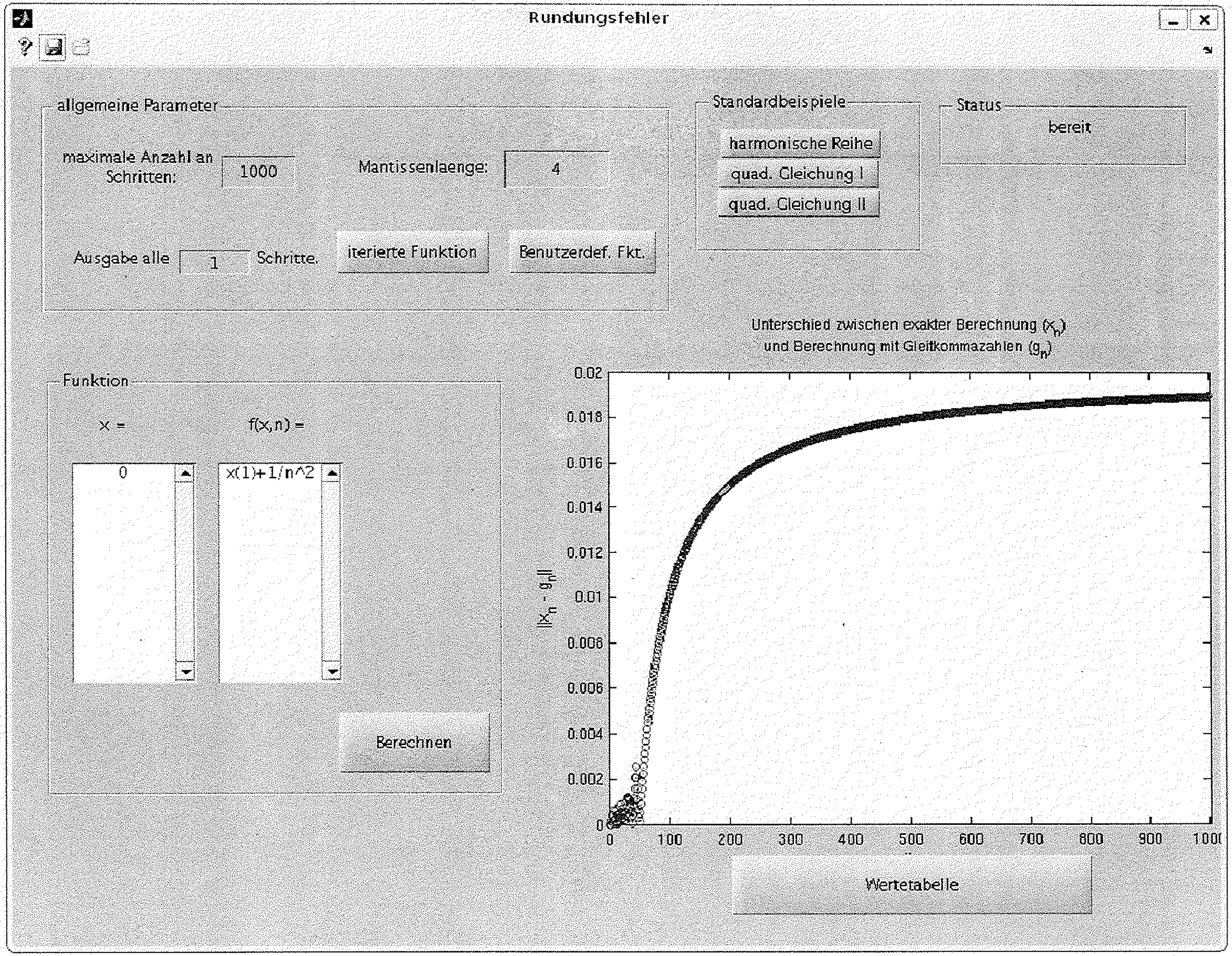
Rückwärts:

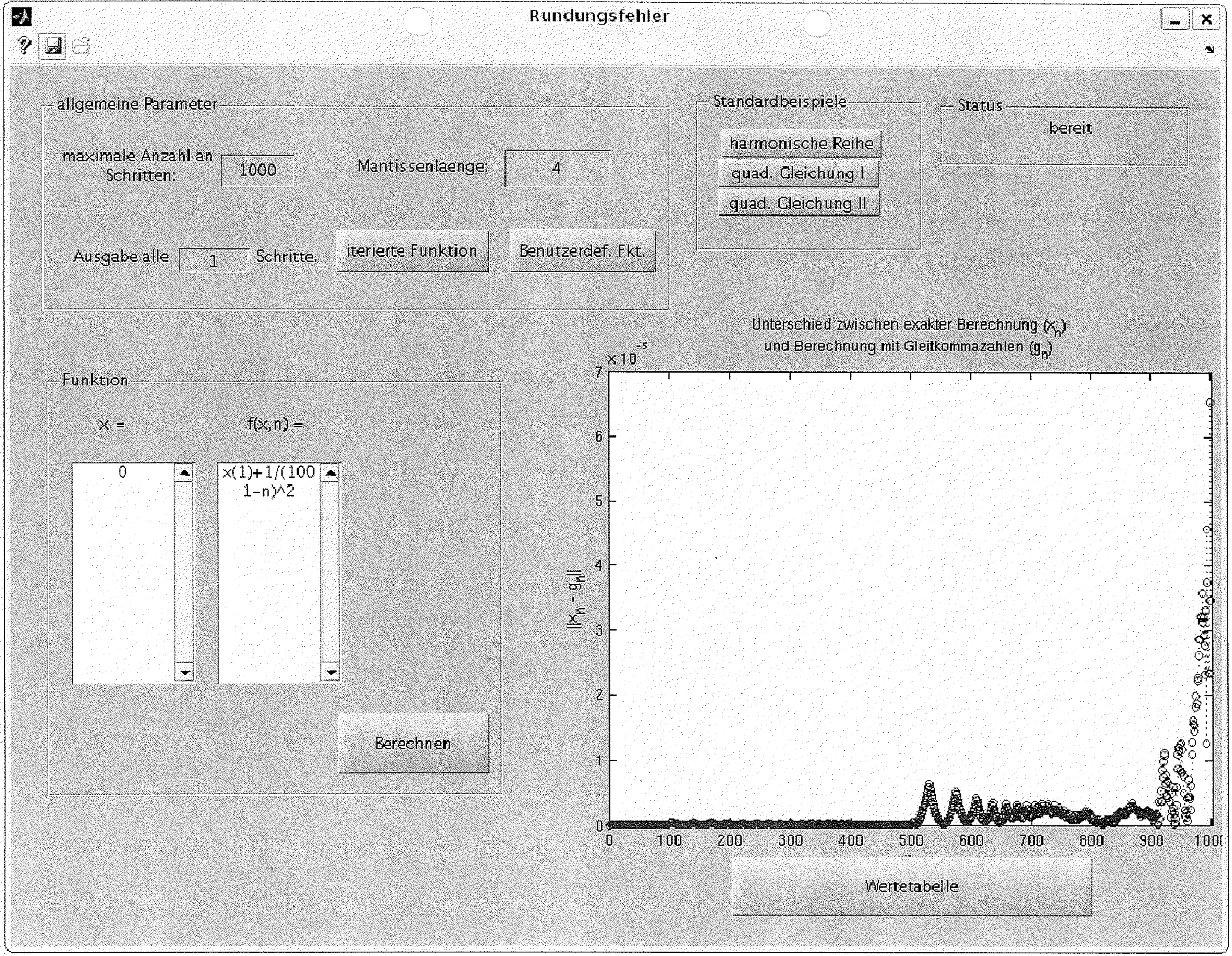
6) Ändere unter „Funktion" und dort unter „f(x,n)" den bisherigen Eintrag auf $x(1)+1/(1001-n)^2$ um

Hierbei ist deutlich zu sehen, dass Rundungsfehler beim vorwärtsaddieren wesentlich früher auftreten, als beim Rückwärtsaddieren.

```
function erg = aufgabe03a

erg=zeros(30,3);

for k=1:30
    k
    erg(k,:) = [2^k, quadrat_reihe(2^k), quadrat_reihe_n(2^k)];
end

figure
loglog(erg(:,1),abs(erg(:,2)-pi^2/6),'b','LineWidth',2);
hold on
loglog(erg(:,1),abs(erg(:,3)-pi^2/6),'r','LineWidth',2);
title('Summation der Reihe \Sigma_{k=1}^n k^{-2}');
legend('vorwaerts summiert', 'rueckwaerts summiert');
xlabel('n');
ylabel('Abstand zum Limes');
end


function summe = quadrat_reihe(n)

i = 1;
summe = 0;

while i <= n
    summe = summe + i^(-2);
    i = i + 1;
end

end


function summe = quadrat_reihe_n(n)

i = n;
summe = 0;

while i > 0
    summe = summe + i^(-2);
    i = i - 1;
end

end
```


vorwaerts summiert
rueckwaerts summiert
Abstand zum Limes
n
10^0
10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
10^{-8}
10^{-10}
10^0
10^2
10^4
10^6
10^8
10^{10}


Rundungsfehler
allgemeine Parameter
maximale Anzahl an Schritten:
1000
Mantissenlaenge:
4
Ausgabe alle
1
Schritte.
iterierte Funktion
Benutzerdef. Fkt.
Standardbeispiele
harmonische Reihe
quad. Gleichung I
quad. Gleichung II
Status
bereit
Funktion
x =
f(x,n) =
0
x(1)+1/n^2
Berechnen
Unterschied zwischen exakter Berechnung (x_n)
und Berechnung mit Gleitkommazahlen (g_n)
$\|x_n - g_n\|$
0.02
0.018
0.016
0.014
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
Wertetabelle


Rundungsfehler
allgemeine Parameter
maximale Anzahl an Schritten:
1000
Mantissenlaenge:
4
Ausgabe alle
1
Schritte.
iterierte Funktion
Benutzerdef. Fkt.
Standardbeispiele
harmonische Reihe
quad. Gleichung I
quad. Gleichung II
Status
bereit
Funktion
x =
0
f(x,n) =
x(1)+1/(1001-n)^2
Berechnen
Unterschied zwischen exakter Berechnung (x_n)
und Berechnung mit Gleitkommazahlen (g_n)
$\times 10^{-5}$
$\|x_n - g_n\|$
0
1
2
3
4
5
6
7
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
Wertetabelle