Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 3
29.04.2010

Abgabe: Donnerstag, 06.05.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 7: (Berechnung von Interpolationspolynomen)
Berechnen Sie *von Hand* das Interpolationspolynom p, das durch die Punkte

$$(-4,-1)\,,\ (-2,1)\,,\ (0,10)\,,\ (2,9)$$

verläuft

(3) (a) unter Verwendung der Lagrangeschen Basispolynome,

(3) (b) in der Newtonschen Darstellung.

Überführen Sie das resultierende Polynom p jeweils in die Monomdarstellung

$$p(t) = \sum_i a_i t^i.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 8: (Programmieraufgabe, dividierte Differenzen, Horner-artiges Schema)

1 (a) Werten Sie mit dem Newton-Schema der dividierten Differenzen das Interpolationspolynom p zu den Daten (t_i, s_i), $i = 0,\ldots,m$ aus, wobei die Daten $s_i = f(t_i)$ durch Auswertung von $f(t) = \exp(-t^2)$ entstehen. Verwenden Sie zunächst die $m+1 = 20$ Stützstellen

$$t_i = a + \frac{(b-a)}{m}\cdot i, \quad i = 0,\ldots,m$$

mit $a = -2$, $b = 2$ und berechnen Sie den Fehler $|f(\tau_i) - p(\tau_i)|$ an Zwischenpunkten

$$\tau_i = a + \frac{(b-a)}{2m} + \frac{(b-a)}{m}\cdot i, \quad i = 0,\ldots,m-1.$$

Zeichnen Sie die Graphen von f und p sowie den Fehler $|f - p|$ in ein Diagramm.

(1) Bestimmen Sie in einer zweiten Rechnung für $m+1=2,\ldots,100$ Stützstellen speziell das m, für das der Fehler

$$e_m := \max\{\,|f(\zeta_i)-p_m(\zeta_i)| \;:\; i=1,\ldots,2000\} \quad \text{mit} \quad \zeta_i := a+\frac{(b-a)}{2001}i$$

minimal wird. Hierbei bezeichnet p_m das Interpolationspolynom zu den $m+1$-Datenpaaren (t_i,s_i) für $i=0,\ldots,m$. Zeichnen Sie die Fehler logarithmisch in Abhängigkeit von m. Hinweis: `semilogy`. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

(b) Verfahren Sie ebenso mit der Funktion $f(t)=\frac{t^2\sin(4t)}{10}$ mit $m+1=20$ äquidistanten Stützstellen sowie $a=-4\pi$ und $b=4\pi$, indem Sie f, p und $|f-p|$ in ein Diagramm zeichnen.

Bestimmen Sie in einer weiteren Rechnung für $m+1=2,\ldots,100$ Stützstellen speziell das m, für das der Fehler e_m minimal wird und zeichnen Sie die Fehler logarithmisch in Abhängigkeit von m. Interpretieren Sie auch diese Ergebnisse.

Hinweis: Ihrer Ergebnisse können Sie mit Hilfe der GUI: *Interpolation* überprüfen, die in den NUMLAB-GUIs enthalten ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 9: (Polynominterpolation, Newtonsche Darstellung)

(3) (a) Zeigen Sie, dass es zu den vorgegebenen Stützstellen $t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ und den vorgegebenen Werten $s_i, r_i \in \mathbb{R}$, $i=0,\ldots,m$ genau ein Polynom p vom Grad $\leq 2m+1$ gibt mit

$$p(t_i)=s_i,\; p'(t_i)=r_i \quad (i=0,\ldots,m). \tag{1}$$

Hinweis: Man überlege sich, dass es genügt, aus (1) mit $s_i=r_i=0$ ($i=0,\ldots,m$) und $p\in\mathcal{P}_{2m+1}$ wie bei der gewöhnlichen Polynominterpolation $p=0$ zu folgern.

(3) (b) Geben Sie im Fall $m=1$ die Newtonsche Darstellung

$$p(t)=a_0+a_1(t-t_0)+a_2(t-t_0)^2+a_3(t-t_0)^2(t-t_1)$$

dieses Polynoms explizit an.

(6 Punkte)

Aufgabe 7: (Interpolationspolynom)

Es seien die Punkte

$$(t_0, s_0) = (-4, -1)$$
$$(t_1, s_1) = (-2, 1) \qquad (7.1)$$
$$(t_2, s_2) = (0, 10)$$
$$(t_3, s_3) = (2, 9)$$

gegeben. Gesucht wird eine Funktion $p(t)$, genauer ein Polynom – genannt das „Interpolationspolynom" –, mit der Eigenschaft $p(t_i) = s_i \; \forall i = 0, \dots, 3$.

zu (a): (Interpolationspolynom mittels Lagrangeschen Basispolynomen)

1. Konstruktion der Lagrangeschen Basispolynome:

Aus der Vorlesung (vgl. (3.9)) erhalten wir die Lagrangeschen Basispolynome aus

$$L_j(t) := \frac{w_j(t)}{w_j(t_j)} \quad , j = 0, \dots, m \qquad (7.2)$$

wobei

$$w_j(t) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} (t - t_i) \quad , j = 0, \dots, m \, . \qquad (7.3)$$

Aus (7.1), (7.2) und (7.3) erhalten wir (speziell mit $m = 3$):

$$L_0(t) \underset{(7.2)}{=} \frac{w_0(t)}{w_0(t_0)} \underset{(7.3)}{=} \frac{(t-t_1)\cdot(t-t_2)\cdot(t-t_3)}{(t_0-t_1)\cdot(t_0-t_2)\cdot(t_0-t_3)}$$
$$\underset{(7.1)}{=} \frac{(t-(-2))\cdot(t-0)\cdot(t-2)}{(-4-(-2))\cdot(-4-0)\cdot(-4-2)}$$
$$= \left(-\frac{1}{48}\right)\cdot t\cdot(t+2)(t-2)$$

$$L_1(t) \underset{(7.2)}{=} \frac{w_1(t)}{w_1(t_1)} \underset{(7.3)}{=} \frac{(t-t_0)\cdot(t-t_2)\cdot(t-t_3)}{(t_1-t_0)\cdot(t_1-t_2)\cdot(t_1-t_3)}$$
$$\underset{(7.1)}{=} \frac{(t-(-4))\cdot(t-0)\cdot(t-2)}{(-2-(-4))\cdot(-2-0)\cdot(-2-2)}$$
$$= \left(\frac{1}{16}\right)\cdot t\cdot(t+4)\cdot(t-2) \qquad (7.4)$$

$$L_2(t) \underset{(7.2)}{=} \frac{w_2(t)}{w_2(t_2)} \underset{(7.3)}{=} \frac{(t-t_0)\cdot(t-t_1)\cdot(t-t_3)}{(t_2-t_0)\cdot(t_2-t_1)\cdot(t_2-t_3)}$$
$$\underset{(7.1)}{=} \frac{(t-(-4))\cdot(t-(-2))\cdot(t-2)}{(0-(-4))\cdot(0-(-2))\cdot(0-2)}$$
$$= \left(-\frac{1}{16}\right)\cdot(t+4)\cdot(t+2)\cdot(t-2)$$

$$L_3(t) \underset{(7.2)}{=} \frac{w_3(t)}{w_3(t_3)} \underset{(7.3)}{=} \frac{(t-t_0)\cdot(t-t_1)\cdot(t-t_2)}{(t_3-t_0)\cdot(t_3-t_1)\cdot(t_3-t_2)}$$
$$\underset{(7.1)}{=} \frac{(t-(-4))\cdot(t-(-2))\cdot(t-0)}{(2-(-4))\cdot(2-(-2))\cdot(2-0)}$$
$$= \left(\frac{1}{48}\right)\cdot(t+4)\cdot(t+2)\cdot t$$

2. Berechnung des Interpolationspolynoms:

Setze nun

$$p(t) := \sum_{j=0}^{3} s_j L_j(t) \underset{(7.1)}{=} (-1)\cdot L_0(t) + 1\cdot L_1(t) + 10\cdot L_2(t) + 9\cdot L_3(t)$$
$$\underset{(7.4)}{=} \frac{1}{48}\cdot t\cdot(t+2)\cdot(t-2) + \frac{1}{16}\cdot t\cdot(t+4)\cdot(t-2) - \frac{10}{16}\cdot(t+4)\cdot(t+2)\cdot(t-2) + \frac{9}{48}\cdot t\cdot(t+4)\cdot(t+2)$$
$$\underset{\text{ausrechnen}}{=} \underbrace{-\frac{17}{48}t^3 + \frac{41}{12}t - \frac{5}{4}t^2 + 10}_{\text{Monomdarstellung}} = \sum_{i=0}^{3} \hat{a}_i t^i \qquad (7.5)$$

(ausmultiplizieren) für die Monomdarstellung!

wobei $\hat{a}_0 = 10$, $\hat{a}_1 = \frac{41}{12}$, $\hat{a}_2 = -\frac{5}{4}$, $\hat{a}_3 = -\frac{17}{48}$.

Zu (b): (Interpolationspolynom mittels Newtonscher Darstellung)

Für diesen Ansatz benötigen wir die aus der Vorlesung bekannte Newtonsche Darstellung (vgl. Skript (3.11)):

$$p(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j \prod_{i=0}^{j-1} (t-t_i) = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2\cdot(t-t_0)\cdot(t-t_1) + \dots \qquad (7.6)$$

1. Newtonsche Darstellung:

Aus (7.1) und (7.6) erhalten wir (speziell mit $m=3$)

$$\begin{aligned} p(t) &\underset{(7.6)}{=} a_0 + a_1\cdot(t-t_0) + a_2\cdot(t-t_0)\cdot(t-t_1) + a_3\cdot(t-t_0)\cdot(t-t_1)\cdot(t-t_2) \\ &\underset{(7.1)}{=} a_0 + a_1\cdot(t-(-4)) + a_2\cdot(t-(-4))\cdot(t-(-2)) + a_3\cdot(t-(-4))\cdot(t-(-2))\cdot(t-0) \\ &= a_0 + a_1\cdot(t+4) + a_2\cdot(t+4)\cdot(t+2) + a_3\cdot(t+4)\cdot(t+2)\cdot t \end{aligned} \qquad (7.7)$$

Im nächsten Schritt müssen die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 bestimmt werden.

2. Berechnung der Koeffizienten:

Möglichkeit A: (Einsetzen): Beachte: Zu Beginn der Aufgabe wurde von p gefordert: $p(t_i)=s_i \ \forall i=0,\dots,3$

①: $(t_0, s_0) = (-4,-1)$

$$\Rightarrow -1 \overset{!}{=} p(-4) \underset{(7.7)}{=} a_0$$

$$\Rightarrow a_0 = -1 \qquad (7.8)$$

②: $(t_1, s_1) = (-2, 1)$

$$\Rightarrow 1 \overset{!}{=} p(-2) \underset{(7.7)}{=} a_0 + a_1\cdot(-2+4) \underset{(7.8)}{=} -1 + 2a_1$$

$$\Rightarrow a_1 = 1 \qquad (7.9)$$

③: $(t_2, s_2) = (0, 10)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 10 \overset{!}{=} p(0) &\underset{(7.7)}{=} a_0 + a_1\cdot(0+4) + a_2\cdot(0+4)\cdot(0+2) \\ &\underset{\substack{(7.8)\\(7.9)}}{=} -1 + 1\cdot 4 + a_2\cdot 8 = 3 + 8a_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{7}{8} \qquad (7.10)$$

④: $(t_3, s_3) = (2, 9)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 9 \overset{!}{=} p(2) &\underset{(7.7)}{=} a_0 + a_1\cdot(2+4) + a_2\cdot(2+4)\cdot(2+2) + a_3\cdot(2+4)\cdot(2+2)\cdot 2 \\ &\underset{\substack{(7.8)\\(7.9)\\(7.10)}}{=} -1 + 1\cdot 6 + \frac{7}{8}\cdot 24 + a_3\cdot 48 = 26 + 48\cdot a_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_3 = -\frac{17}{48}$$

Möglichkeit B: (Dividierte Differenzen)

Schema:

$$\begin{array}{lllllll} t_0 & s_0 =: d_{00} =: a_0 & & & & & \\ & & \searrow & & & & \\ t_1 & s_1 =: d_{10} & \rightarrow & d_{11} =: a_1 & & & \\ & & \searrow & & \searrow & & \\ t_2 & s_2 =: d_{20} & \rightarrow & d_{21} & \rightarrow & d_{22} =: a_2 & \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ t_3 & s_3 =: d_{30} & \rightarrow & d_{31} & \rightarrow & d_{32} & \rightarrow \ d_{33} =: a_3 \end{array} \qquad (7.11)$$

Berechnung der d_{ij}'s $(i=1,\dots,3;\ j=1,\dots,3)$:

$$d_{ij} := \frac{d_{i,j-1} - d_{i-1,j-1}}{t_i - t_{i-j}} \qquad (7.12)$$

Aus (7.1) und (7.12) erhalten wir

$$\begin{aligned} d_{11} &\underset{(7.12)}{=} \frac{d_{10}-d_{00}}{t_1-t_0} \underset{(7.11)}{=} \frac{s_1-s_0}{t_1-t_0} \underset{(7.1)}{=} \frac{1-(-1)}{-2-(-4)} = \frac{2}{2} = 1 =: a_1 \\ d_{21} &\underset{(7.12)}{=} \frac{d_{20}-d_{10}}{t_2-t_1} \underset{(7.11)}{=} \frac{s_2-s_1}{t_2-t_1} \underset{(7.1)}{=} \frac{10-1}{0-(-2)} = \frac{9}{2} \\ d_{31} &\underset{(7.12)}{=} \frac{d_{30}-d_{20}}{t_3-t_2} \underset{(7.11)}{=} \frac{s_3-s_2}{t_3-t_2} \underset{(7.1)}{=} \frac{9-10}{2-0} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \qquad (7.13)$$

$$d_{22} \underset{(7.12)}{=} \frac{d_{21}-d_{11}}{t_2-t_0} \underset{(7.13)}{=} \frac{\frac{9}{2}-\frac{2}{2}}{0-(-4)} = \frac{\frac{7}{2}}{4} = \frac{7}{8} =: a_2$$

$$d_{32} \underset{(7.12)}{=} \frac{d_{31}-d_{21}}{t_3-t_1} \underset{(7.13)}{\overset{(7.1)}{=}} \frac{-\frac{1}{2}-\frac{9}{2}}{2-(-2)} = \frac{-5}{4} = -\frac{5}{4} \qquad (7.14)$$

$$d_{33} \underset{(7.12)}{=} \frac{d_{32}-d_{22}}{t_3-t_0} \underset{(7.14),\,(7.1)}{\overset{(7.1)}{=}} \frac{-\frac{5}{4}-\frac{7}{8}}{2-(-4)} = \frac{-\frac{17}{8}}{6} = -\frac{17}{48} =: a_3$$

3. Berechnung des Interpolationspolynoms:

Aus der Berechnung der Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 (in Möglichkeit A bzw. B) und (7.7) erhalten wir

$$p(t) \underset{(7.7)}{=} a_0 + a_1\cdot(t+4) + a_2\cdot(t+4)\cdot(t+2) + a_3\cdot(t+4)\cdot(t+2)\cdot t$$

$$\underset{\text{Koeff.}}{=} -1 + 1\cdot(t+4) + \frac{7}{8}\cdot(t+4)\cdot(t+2) + \left(-\frac{17}{48}\right)\cdot(t+4)\cdot(t+2)\cdot t$$

$$\underset{\text{ausmultiplizieren}}{=} \underbrace{-\frac{17}{48}t^3 + \frac{41}{12}t + -\frac{5}{4}t^2 + 10}_{\text{Monomdarstellung}} = \sum_{i=0}^{3} \hat{a}_i t^i \qquad (7.15)$$

Wegen der Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms (vom Grad ≤ 3) ist es nicht weiter verwunderlich, dass die Darstellungen (7.5) und (7.15) übereinstimmen.

Aufgabe 8:

```
function aufgabe08
% Aufgabe 8: (Programmieraufgabe, Newtonsche Darstellung und dividierte
% Differenzen)

% ---------------------
% | Aufgabenteil (a) |
% ---------------------

% 1. Vorbereitungen:
xl=-2;          % xl=linke Intervallgrenze
xr=2;           % xr=rechte Intervallgrenze
m=19;           % m+1=Anzahl der Stuetzstellen, m=Anzahl der Teilintervalle

% 2. Berechnung der dividierten Differenzen
t=xl:(xr-xl)/m:xr;          % t=Stuetzstellen
s=f1(t);                    % s=Funktionsauswertungen an den Stuetzstellen,
                            % f1 Funktion aus Teil (a) (siehe unten)
a=div_diff(s,t);            % div_diff=Dividierte Differenzen Funktion (siehe
                            % unten, vgl. Skript: Seite 37)

% 3. Berechnung des Fehlers |f(t)-p(t)|
tau=xl+(xr-xl)/(2*m):(xr-xl)/m:xr;  % Zwischenstellen
fehler = zeros(size(tau));
for i=1:length(tau)
    fehler(i)=abs(p(tau(i),t,a)-f1(tau(i)));
end
format long
disp('tau                              Fehler');
disp([tau', fehler']);
disp('');

% 4. Zeichnung der Graphen f, p sowie des Fehlers |f-p|
figure
fplot(@(x) f1(x),[xl xr],'b');
hold on
fplot(@(x) p(x,t,a),[xl xr],'r');
plot(tau,fehler,'g');
hold off
title('Interpolationspolynom zu f(t) = exp(-t^2)');
legend('f(t)', 'p(t)', '|f(t)-g(t)|');
xlabel('x');
ylabel('y');

% 5. Bestimme m, sodass |f-p|_{C(0,2*pi)} minimal wird
iterMAX=99;                       % iterMAX=Max. erlaubte Anzahl an Teilinter-
                                  % vallen (>=2), iterMAX+1=Max. erlaubte
                                  % Anzahl an Stuetzstellen (>=3)
fehlerMIN=zeros(iterMAX-1,1);% Initialisiere den Startfehler (mit
                                  % irgendeiner grossen Zahl)
for k=2:iterMAX
    % Berechnung der dividierten Differenzen
    % k+1=Anzahl der Stuetzstellen, k=Anzahl der Teilintervalle
    t=xl:(xr-xl)/k:xr;  % t=Stuetzstellen
    s=f1(t);            % s=Funktionsauswertungen an den Stuetzstellen,
                        % f1 Funktion aus Teil (a) (siehe unten)
```

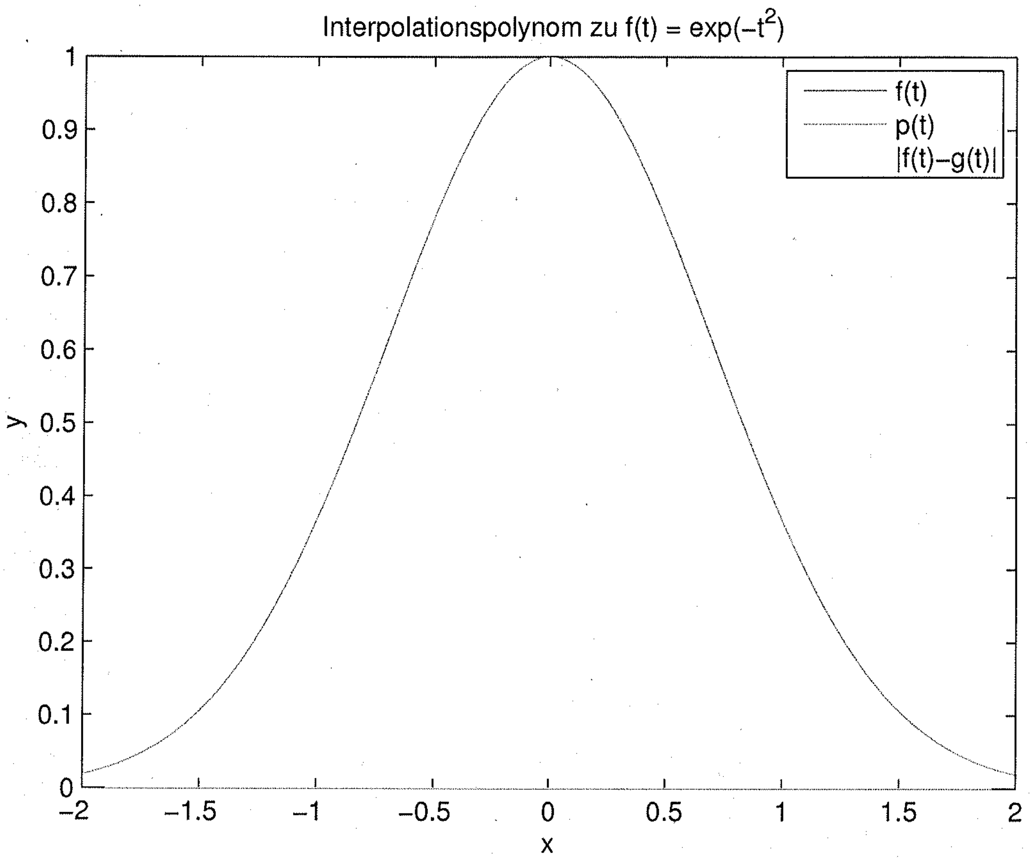
```
    a=div_diff(s,t);      % div_diff=Dividierte Differenzen Funktion (siehe
                          % unten, vgl. Skript: Seite 37)
    % Berechnung des Fehlers f(t)-p(t)
    tau2=xl+(xr-xl)/2001:(xr-xl)/k:xr;
    fehler = zeros(size(tau2));
    for l=1:length(tau2)
        fehler(l)=abs(p(tau2(l),t,a)-f1(tau2(l)));
    end
    fehlerMIN(k-1)=max(fehler(:));
end
figure
semilogy(3:iterMAX+1,fehlerMIN,'b');
title('Fehler der Interpolationspolynome zu f(t) = exp(-t^2)');
xlabel('Anzahl der Stuetzstellen');
ylabel('Max. Fehler |f(t)-p_m(t)| an den Zwischenstellen tau_i');
[ValueMIN,mMIN]=min(fehlerMIN);
[ValueMAX,mMAX]=max(fehlerMIN);
disp(['Minimaler Fehler ',num2str(ValueMIN),' bei '...
,num2str(mMIN+2),' Stuetzstellen.']);
disp(['Maximaler Fehler ',num2str(ValueMAX),' bei '...
,num2str(mMAX+2),' Stuetzstellen.']);

% -------------------
% | Aufgabenteil (b) |
% -------------------
clear all;
% 1. Vorbereitungen:
xl=-4*pi;    % xl=linke Intervallgrenze
xr=4*pi;     % xr=rechte Intervallgrenze
m=19;        % m+1=Anzahl der Stuetzstellen, m=Anzahl der Teilintervalle

% 2. Berechnung der dividierten Differenzen
t=xl:(xr-xl)/m:xr;        % t=Stuetzstellen
s=f2(t);                  % s=Funktionsauswertungen an den Stuetzstellen,
                          % f2 Funktion aus Teil (b) (siehe unten)
a=div_diff(s,t);          % div_diff=Dividierte Differenzen Funktion (siehe
                          % unten, vgl. Skript: Seite 37)

% 3. Berechnung des Fehlers |f(t)-p(t)|
tau=xl+(xr-xl)/(2*m):(xr-xl)/m:xr;  % Zwischenstellen
fehler = zeros(size(tau));
for i=1:length(tau)
    fehler(i)=abs(p(tau(i),t,a)-f2(tau(i)));
end
format long
disp('tau                    Fehler');
disp([tau', fehler']);
disp('');

% 4. Zeichnung der Graphen f, p sowie des Fehlers |f-p|
figure
fplot(@(x) f2(x),[xl xr],'b');
hold on
fplot(@(x) p(x,t,a),[xl xr],'r');
plot(tau,fehler,'g');
```

```
hold off
title('Interpolationspolynom zu f(t) = 1/10*t^2*sin(4t)');
legend('f(t)', 'p(t)', '|f(t)-g(t)|');
xlabel('x');
ylabel('y');

% 5. Bestimme m, sodass |f-p|_{C(0,2*pi)} minimal wird
iterMAX=99;                    % iterMAX=Max. erlaubte Anzahl an Teilinter-
                               % vallen (>=2), iterMAX+1=Max. erlaubte
                               % Anzahl an Stuetzstellen (>=3)
fehlerMIN=zeros(iterMAX-1,1);% Initialisiere den Startfehler (mit
                               % irgendeiner grossen Zahl)
for k=2:iterMAX
    % Berechnung der dividierten Differenzen
    % k+1=Anzahl der Stuetzstellen, k=Anzahl der Teilintervalle
    t=xl:(xr-xl)/k:xr;    % t=Stuetzstellen
    s=f2(t);              % s=Funktionsauswertungen an den Stuetzstellen,
                          % f2 Funktion aus Teil (b) (siehe unten)
    a=div_diff(s,t);      % div_diff=Dividierte Differenzen Funktion (siehe
                          % unten, vgl. Skript: Seite 37)
    % Berechnung des Fehlers f(t)-p(t)
    tau2=xl+(xr-xl)/2001:xr;
    fehler = zeros(size(tau2));
    for l=1:length(tau2)
        fehler(l)=abs(p(tau2(l),t,a)-f2(tau2(l)));
    end
    fehlerMIN(k-1)=max(fehler(:));
end
figure
semilogy(3:iterMAX+1,fehlerMIN,'b');
title('Fehler der Interpolationspolynome zu f(t) = 1/10*t^2*sin(4t)');
xlabel('Anzahl der Stuetzstellen');
ylabel('Max. Fehler |f(t)-p_m(t)| an den Zwischenstellen tau_i');
[ValueMIN,mMIN]=min(fehlerMIN);
[ValueMAX,mMAX]=max(fehlerMIN);
disp(['Minimaler Fehler ',num2str(ValueMIN),' bei '...
,num2str(mMIN+2),' Stuetzstellen.']);
disp(['Maximaler Fehler ',num2str(ValueMAX),' bei '...
,num2str(mMAX+2),' Stuetzstellen.']);

% -------------------------
% | Anhang (Funktionen) |
% -------------------------

% Funktion Aufgabenteil (a):
function y = f1(t)
    y = exp(-t.^2); %itermax=70, [-2,2]
    %y = 2.*sech(t); %itermax=60, [-pi,pi]
    %y = 1./(1+t.^2);
end

% Funktion Aufgabenteil (b):
function y = f2(t)
    y = t.^2.*sin(4.*t)./10; %itermax=90, [-4*pi,4*pi]
    %y = 2.*sech(t); %[-pi,pi]
```

```
    %y = t.^2.*sech(t); %[-pi,pi]
end

% Dividierte Differenzen:
function a=div_diff(s,t)
    m=length(s);
    d=zeros(m,m);          % Matrix mit den dividierten Differenzen
    d(:,1)=s;                  % Initialisierung der dividierten Differenzen
    for j=2:m
        for i=j:m
            d(i,j)=(d(i,j-1)-d(i-1,j-1))/(t(i)-t(i-j+1));
        end
    end
    a=diag(d);
end

% Hornerartiges Schema (zur Auswertung des Interpolationspolynoms p):
function y = p(x,t,a)
m = length(a)-1;
b = zeros(size(a));
b(m+1) = a(m+1);                 % Initialisierung
for j=m:-1:1
    b(j) = b(j+1)*(x-t(j)) + a(j);
end
y = b(1);
end

end
```

zu (a)

Abb. 1



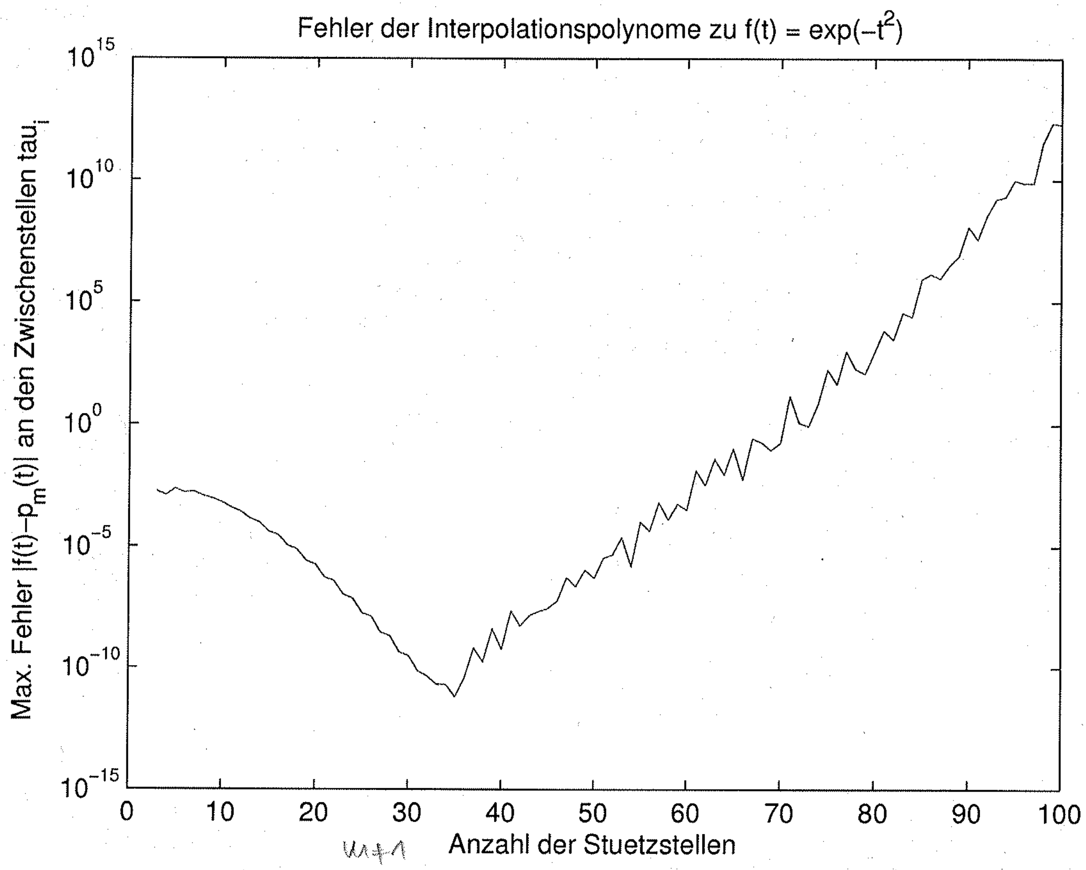
Interpolationspolynom zu f(t) = exp(−t²)
f(t)
p(t)
|f(t)−g(t)|
y
x
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2

tau	Fehler
-1.900000000000000	0.000013797812699
-1.700000000000000	0.000001267337998
-1.500000000000000	0.000000191434778
-1.300000000000000	0.000000040445662
-1.100000000000000	0.000000011008634
-0.900000000000000	0.000000003658409
-0.700000000000000	0.000000001419349
-0.500000000000000	0.000000000609851
-0.300000000000000	0.000000000262302
-0.100000000000000	0.000000000074154
0.100000000000000	0.000000000074154
0.300000000000000	0.000000000262302
0.500000000000000	0.000000000609851
0.700000000000000	0.000000001419349
0.900000000000000	0.000000003658407
1.100000000000000	0.000000011008632
1.300000000000000	0.000000040445667
1.500000000000000	0.000000191434778
1.700000000000000	0.000001267337984
1.900000000000000	0.000013797812710

Minimaler Fehler 6.3381e-12 bei 35 Stuetzstellen.
Maximaler Fehler 2172063047620.134 bei 99 Stuetzstellen.

Fehler des Interpolationspolynoms von $f(t) = \exp(-t^2)$ bei $n+1=20$ äquid. Stützstellen auf $[-2,2]$ an den Zwischenstellen τ_i

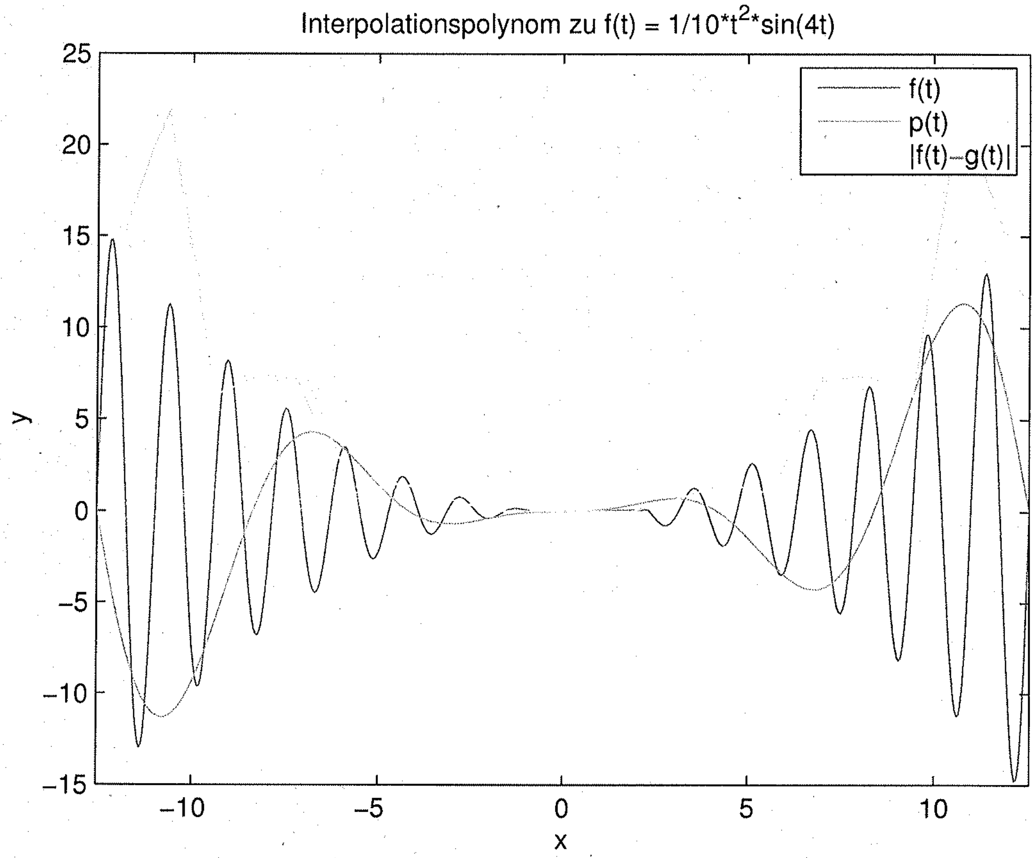
Abb. 2



Fehler der Interpolationspolynome zu f(t) = exp(−t²)
Max. Fehler |f(t)−p_m(t)| an den Zwischenstellen tau_i
10^15
10^10
10^5
10^0
10^−5
10^−10
10^−15
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
m+1
Anzahl der Stuetzstellen

zu (b)

Abb. 3



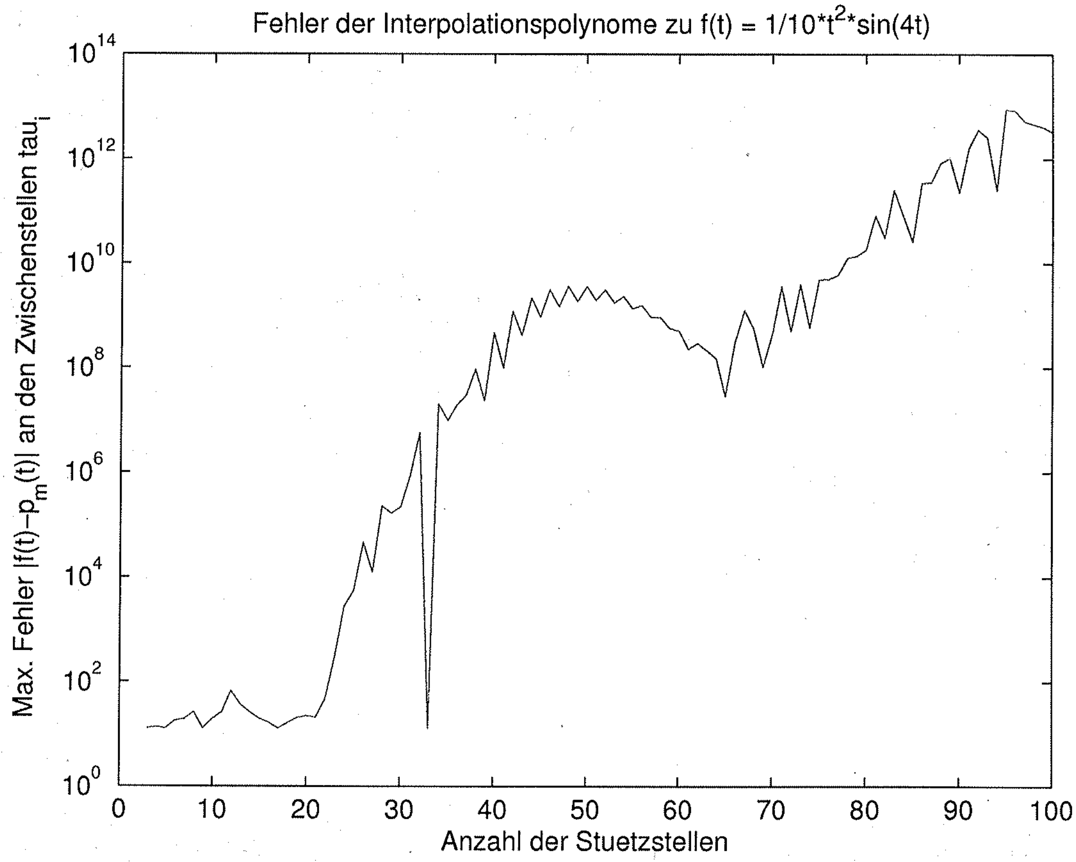
Interpolationspolynom zu f(t) = 1/10*t^2*sin(4t)
f(t)
p(t)
|f(t)−g(t)|
y
x
25
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−10
−5
0
5
10

tau	Fehler
-11.938052083641214	14.812330871354728
-10.681415022205297	22.122453849969155
-9.424777960769379	6.280610598090421
-8.168140899333462	7.388950454758247
-6.911503837897545	7.064038462296383
-5.654866776461628	0.969622357326706
-4.398229715025710	1.537149439218562
-3.141592653589793	0.697886784420162
-1.884955592153876	0.013015404653227
-0.628318530717959	0.005281996335358
0.628318530717959	0.005281996335013
1.884955592153876	0.013015404653446
3.141592653589793	0.697886784420452
4.398229715025710	1.537149439221579
5.654866776461628	0.969622357319367
6.911503837897545	7.064038462285232
8.168140899333462	7.388950454741760
9.424777960769379	6.280610598130923
10.681415022205297	22.122453850039818
11.938052083641214	14.812330871463757

Minimaler Fehler 12.7515 bei 5 Stuetzstellen.
Maximaler Fehler 8766849833186.26 bei 95 Stuetzstellen.

Fehler des Interpolationspolynoms von $f(t) = \frac{1}{10} \cdot t^2 \cdot \sin(4 \cdot t)$ bei $n+1=20$ äquidistanten Stützstellen auf $[-4\pi, 4\pi]$ an den Zwischenstellen τ_i

Abb. 4


Fehler der Interpolationspolynome zu f(t) = 1/10*t^2*sin(4t)
Max. Fehler |f(t)-p_m(t)| an den Zwischenstellen tau_i
Anzahl der Stuetzstellen
10^0
10^2
10^4
10^6
10^8
10^10
10^12
10^14
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

Aufgabe 9: (Polynominterpolation, Newtonsche Darstellung)

(a) Seien die Datenpaare (t_i, s_i) und (t_i, r_i) mit $t_i, s_i, r_i \in \mathbb{R}$ und $t_i < t_{i+1}$ für $i = 0, \dots, m$ gegeben. (t_i = Stützstellen, s_i = Funktionswert an der Stützstelle t_i, r_i = Funktionswert der Ableitung an der Stützstelle t_i). Zeigen Sie:

$$\exists_1\, p \in \mathcal{P}_{2m+1} \quad \forall i = 0, \dots, m: \begin{cases} ①: p(t_i) = s_i & (9.1) \\ \text{und} \\ ②: p'(t_i) = r_i & (9.2) \end{cases}$$

(b) Geben Sie im Fall $m = 1$ die Newtonsche Darstellung

$$p(t) = a_0 + a_1 \cdot (t - t_0) + a_2 \cdot (t - t_0)^2 + a_3 \cdot (t - t_0)^2 \cdot (t - t_1) \tag{9.3}$$

dieses Polynoms an.

Zu (a): Vorbemerkung: Wir erinnern an die Lagrangeschen Basispolynome (vgl. Skript, Seite 34, (3.9)): Seien t_i $(i = 0, \dots, m)$ Stützstellen.

Existenz:

$$\underbrace{L_j(t)}_{\text{j-tes Lagrangesches Basispolynom (Lagrange-Grundpolynom)}} := \frac{w_j(t)}{w_j(t_j)}, \quad \text{wobei} \quad \underbrace{w_j(t)}_{\text{j-tes Knotenpolynom}} := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} (t - t_i), \quad j = 0, \dots, m \tag{9.4}$$

Beweis: [redacted] Definiere

$$\rho_j(t) := w_j^2(t) \overset{(9.4)}{=} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} (t - t_i)^2 \in \mathcal{P}_{2m}, \quad j = 0, \dots, m \tag{9.5}$$

$$\theta_j(t) := (t - t_j) \cdot \rho_j(t) = (t - t_j) \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} (t - t_i)^2 \in \mathcal{P}_{2m+1}, \quad j = 0, \dots, m \tag{9.6}$$

Die Polynome ρ_j und θ_j aus (9.5) und (9.6) erfüllen $\forall k = 0, \dots, m$

$$Ⓐ: \rho_j(t_k) \overset{(9.5)}{=} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} (t_k - t_i)^2 = \delta_{jk} \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} (t_j - t_i)^2 \overset{(9.5)}{=} \delta_{jk} \cdot \rho_j(t_j) \tag{9.7}$$

$$Ⓑ: \rho_j'(t_k) \underset{\text{Produktregel}}{\overset{[redacted]}{=}} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{m} 2(t_k - t_l) \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j \\ i \neq l}}^{m} (t_k - t_i)^2 = \delta_{jk} \cdot \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{m} 2(t_j - t_l) \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j \\ i \neq l}}^{m} (t_j - t_i)^2 = \delta_{jk} \cdot \rho_j'(t_j) \tag{9.8}$$

$$\hookrightarrow \rho_j'(t) \overset{(9.5)}{=} \frac{d}{dt} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} (t - t_j)^2 \underset{\substack{\text{Prod.regel} \\ \text{(Leibnizregel)}}}{=} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{m} \left[\frac{d}{dt} (t - t_l)^2\right] \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j \\ i \neq l}}^{m} (t - t_i)^2 = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{m} 2(t - t_l) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j \\ i \neq l}}^{m} (t - t_i)^2$$

$$Ⓒ: \theta_j(t_k) \overset{(9.6)}{=} (t_k - t_j) \cdot \rho_j(t_k) \overset{(9.7)}{=} \underbrace{(t_k - t_j) \cdot \delta_{jk}}_{= 0 \text{ (denn: } \delta_{jk} = 0 \Leftrightarrow j \neq k \text{ \& } (t_k - t_j) = 0 \Leftrightarrow j = k)} \cdot \rho_j(t_j) = 0 \tag{9.9}$$

$$Ⓓ: \theta_j'(t_k) \underset{\text{Produktregel}}{=} [redacted] \quad ⊛$$

$$\hookrightarrow [redacted]\ \theta_j'(t) \underset{(9.6)}{=} \frac{d}{dt} (t - t_j) \cdot \rho_j(t) \underset{\text{Produktregel}}{=} \rho_j(t) + (t - t_j) \cdot \rho_j'(t)$$

$$⊛ = \rho_j(t_k) + (t_k - t_j) \cdot \rho_j'(t_k) \underset{\substack{(9.7) \\ (9.8)}}{=} \delta_{jk} \cdot \rho_j(t_j) + \underbrace{(t_k - t_j) \cdot \delta_{jk}}_{= 0} \cdot \rho_j'(t_j)$$

$$= \delta_{jk} \cdot \rho_j(t_j) \tag{9.10}$$

Setzen wir nun

$$p(t) := \sum_{j=0}^{m} \left[s_j \cdot \frac{\rho_j(t)}{\rho_j(t_j)} + \left(r_j - s_j \cdot \frac{\rho_j'(t)}{\rho_j(t_j)} \right) \cdot \frac{\theta_j(t)}{\rho_j(t_j)} \right] \in \mathcal{P}_{2m+1} \tag{9.11}$$

so gilt ① und ②, denn:

zu ①:

$$p(t_K) \underset{(9.11)}{=} \sum_{j=0}^{m}\left[s_j\cdot\frac{\varrho_j(t_K)}{\varrho_j(t_j)} + \left(r_j - s_j\cdot\frac{\varrho_j'(t_K)}{\varrho_j(t_j)}\right)\cdot\frac{\theta_j(t_K)}{\varrho_j(t_j)}\right]$$

$$\underset{\substack{(9.7)\\(9.8)\\(9.9)}}{=} \sum_{j=0}^{m}\left[\underbrace{s_j\cdot\delta_{jK}\cdot\frac{\cancel{\varrho_j(t_j)}}{\cancel{\varrho_j(t_j)}}}_{=\begin{cases}0 & ,\ j\neq K\\ s_K & ,\ j=K\end{cases}} + \underbrace{\left(r_j - s_j\cdot\delta_{jK}\cdot\frac{\varrho_j'(t_j)}{\varrho_j(t_j)}\right)\cdot\frac{0}{\varrho_j(t_j)}}_{=0}\right]$$

$$= s_K \qquad \forall K=0,\dots,m \qquad \Longrightarrow (9.1)$$

zu ②: p' erhalten wir aus (9.11) durch Differentiation bezüglich t unter Verwendung der Produktregel

$$p'(t) \underset{(9.11)}{=} \frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{m}\left[s_j\cdot\frac{\varrho_j(t)}{\varrho_j(t_j)} + \left(r_j - s_j\cdot\frac{\varrho_j'(t)}{\varrho_j(t_j)}\right)\cdot\frac{\theta_j(t)}{\varrho_j(t_j)}\right]$$

$$\underset{\substack{\text{Produkt-}\\\text{regel}}}{=} \sum_{j=0}^{m}\left[s_j\cdot\frac{\varrho_j'(t)}{\varrho_j(t_j)} + \left(r_j - s_j\cdot\frac{\varrho_j'(t)}{\varrho_j(t_j)}\right)\cdot\frac{\theta_j'(t)}{\varrho_j(t_j)} + \left(-s_j\cdot\frac{\varrho_j''(t)}{\varrho_j(t_j)}\right)\cdot\frac{\theta_j(t)}{\varrho_j(t_j)}\right] \tag{9.12}$$

Daraus erhalten wir (9.2)

$$p'(t_K) \underset{(9.12)}{=} \sum_{j=0}^{m}\left[s_j\cdot\frac{\varrho_j'(t_K)}{\varrho_j(t_j)} + \left(r_j - s_j\cdot\frac{\varrho_j'(t_K)}{\varrho_j(t_j)}\right)\cdot\frac{\theta_j'(t_K)}{\varrho_j(t_j)} - s_j\cdot\frac{\varrho_j''(t_K)}{\varrho_j(t_j)}\cdot\frac{\theta_j(t_K)}{\varrho_j(t_j)}\right]$$

$$\underset{\substack{(9.8)\\(9.9)\\(9.10)}}{=} \sum_{j=0}^{m}\left[s_j\cdot\underbrace{\delta_{jK}}_{!}\cdot\frac{\varrho_j'(t_j)}{\varrho_j(t_j)} + \left(r_j - s_j\cdot\delta_{jK}\cdot\frac{\varrho_j'(t_j)}{\varrho_j(t_j)}\right)\cdot\frac{\cancel{\varrho_j(t_j)}}{\cancel{\varrho_j(t_j)}}\cdot\underbrace{\delta_{jK}}_{!} - \underbrace{s_j\cdot\frac{\varrho_j''(t_K)}{\varrho_j(t_j)}\cdot\frac{0}{\varrho_j(t_j)}}_{=0}\right]$$

$$= \blacksquare\ \cancel{s_K\cdot\frac{\varrho_K'(t_K)}{\varrho_K(t_K)}} + \left(r_K - \cancel{s_K\cdot\frac{\varrho_K'(t_K)}{\varrho_K(t_K)}}\right)\cdot 1$$

$$= r_K \qquad \forall K=0,\dots,m \qquad \Longrightarrow (9.2) \qquad \blacksquare$$

zu (b): Wir nehmen (ohne es zu beweisen) an, dass das Interpolationspolynom p zu den Datenpaaren (t_i, s_i) und (t_i, r_i), $i=0,1$, die Newtonsche Darstellung

$$p(t) = a_0 + a_1\cdot(t-t_0) + a_2\cdot(t-t_0)^2 + a_3\cdot(t-t_0)^2\cdot(t-t_1) \tag{9.12}$$

und somit die Ableitung

$$p'(t) = a_1 + 2\cdot a_2\cdot(t-t_0) + 2\cdot a_3\cdot(t-t_0)\cdot(t-t_1) + a_3\cdot(t-t_0)^2 \tag{9.13}$$

besitzt und die geforderten Eigenschaften (vgl. (9.1) & (9.2))

$$p(t_i) = s_i \qquad ,\ i=0,1 \tag{9.14}$$

$$p'(t_i) = r_i \qquad ,\ i=0,1 \tag{9.15}$$

erfüllt. Durch Einsetzen von t_0 und t_1 in (9.12) und (9.13) erhalten wir

- $$s_0 \underset{(9.14)}{=} p(t_0) \underset{(9.12)}{=} a_0 + a_1\cdot\underbrace{(t_0-t_0)}_{=0} + a_2\cdot\underbrace{(t_0-t_0)^2}_{=0} + a_3\cdot\underbrace{(t_0-t_0)^2}_{=0}\cdot(t_0-t_1)$$

$$= a_0$$

$$\Longrightarrow \boxed{a_0 = s_0} \tag{9.16}$$

- $$r_0 \underset{(9.15)}{=} p'(t_0) \underset{(9.13)}{=} a_1 + 2\cdot a_2\cdot\underbrace{(t_0-t_0)}_{=0} + 2\cdot a_3\cdot\underbrace{(t_0-t_0)}_{=0}\cdot(t_0-t_1) + a_3\cdot\underbrace{(t_0-t_0)^2}_{=0}$$

$$= a_1$$

$$\Longrightarrow \boxed{a_1 = r_0} \tag{9.17}$$

- $s_1 \underset{(9.14)}{=} p(t_1) \underset{(9.12)}{=} a_0 + a_1\cdot(t_1-t_0) + a_2\cdot(t_1-t_0)^2 + a_3\cdot(t_1-t_0)^2\cdot\underbrace{(t_1-t_1)}_{=0}$

$$\underset{\substack{(9.16)\\(9.17)}}{=} s_0 + r_0\cdot(t_1-t_0) + a_2\cdot(t_1-t_0)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{s_1 - s_0 - r_0(t_1-t_0)}{(t_1-t_0)^2} = \frac{\frac{s_1-s_0}{(t_1-t_0)} - r_0}{(t_1-t_0)}} \qquad (9.18)$$

- $r_1 \underset{(9.15)}{=} p'(t_1) \underset{(9.13)}{=} a_1 + 2\cdot a_2\cdot(t_1-t_0) + 2\cdot a_3\cdot(t_1-t_0)\cdot\underbrace{(t_1-t_1)}_{=0} + a_3\cdot(t_1-t_0)^2$

$$\underset{\substack{(9.17)\\(9.18)}}{=} r_0 + 2\cdot\frac{\frac{s_1-s_0}{(t_1-t_0)} - r_0}{\cancel{(t_1-t_0)}}\cdot\cancel{(t_1-t_0)} + a_3\cdot(t_1-t_0)^2$$

$$= -r_0 + 2\cdot\frac{s_1-s_0}{(t_1-t_0)} + a_3\cdot(t_1-t_0)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{r_1 + r_0 - 2\cdot\frac{s_1-s_0}{(t_1-t_0)}}{(t_1-t_0)^2} = \frac{1}{(t_1-t_0)}\cdot\left[\frac{r_1 - \frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}}{t_1-t_0} - \frac{\frac{s_1-s_0}{t_1-t_0} - r_0}{t_1-t_0}\right]}$$

Zusatz: (Dividierte Differenzen Schema)

Das zugehörige Schema der dividierten Differenzen erhalten wir aus der Setzung

$$s[t_0,t_0] := r_0$$
$$s[t_0,t_1] := \frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}$$
$$s[t_1,t_1] := r_1$$

Div. Diff. Algor. (Skript Seite 37) ⇒

$$\left(\begin{aligned} s[t_0,t_0,t_1] &= \frac{s[t_0,t_1]-r_0}{t_1-t_0} \\ s[t_0,t_1,t_1] &= \frac{r_1 - s[t_0,t_1]}{t_1-t_0} \\ s[t_0,t_0,t_1,t_1] &= \frac{s[t_0,t_1,t_1]-s[t_0,t_0,t_1]}{t_1-t_0} \end{aligned}\right)$$

durch

$$\begin{array}{llllllll} & & =:a_0 & =:a_1 & & =:a_2 & & =:a_3 \\ t_0 & s_0 & \to & s[t_0,t_0] & \to & & & \\ t_0 & s_0 & \to & s[t_0,t_1] & \to & s[t_0,t_0,t_1] & \to & \\ t_1 & s_1 & \to & s[t_1,t_1] & \to & s[t_0,t_1,t_1] & \to & s[t_0,t_0,t_1,t_1] \\ t_1 & s_1 & & & & & & \end{array}$$

(Dividiertes Differenzen Schema)

Hinweis zur Berechnung: 1) Sind alle Argumente von s gleich, so ist das Argument in die Ableitung von p einzusetzen:

z.B. $s[\underbrace{t_0,t_0}_{\text{sind gleich}}] \overset{!}{=} p'(t_0) = r_0$

2) Sind die Argumente von s ungleich, so ist wie gewohnt das div. Differenzen Verfahren anzuwenden (Vgl. Skript Seite 37)

z.B. $s[\underbrace{t_0,t_0,t_1}_{\text{sind ungleich}}] = \dfrac{s[t_0,t_1]-s[t_0,t_0]}{t_1-t_0}$

zu (a): Zusatz: (Alternativer Beweis, nicht konstruktiv)

Eindeutigkeit: Sei das Interpolationspolynom p von der Form

$$p(t) = \sum_{j=0}^{2m+1} \alpha_j t^j \quad \in \mathcal{P}_{2m+1} \quad , \alpha \in \mathbb{R}^{2m+2}.$$

So besitzt p die Ableitung

$$p'(t) = \sum_{j=0}^{2m+1} j\cdot\alpha_j\cdot t^{j-1} \in \mathcal{P}_{2m}.$$

Da p die Bedingung (9.1) und p' die Bedingung (9.2) erfüllen muss, erhalten wir ein $2m+2$ dimensionales Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} t_0^0 & t_0^1 & \cdots & t_0^{2m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_m^0 & t_m^1 & \cdots & t_m^{2m+1} \\ 0 & 1\cdot t_0^0 & \cdots & (2m+1)\,t_0^{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1\cdot t_m^0 & \cdots & (2m+1)\cdot t_m^{2m} \end{pmatrix}}_{=:A\in\mathbb{R}^{2m+2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{2m+1} \end{pmatrix}}_{=:\alpha\in\mathbb{R}^{2m+2}} = \underbrace{\begin{pmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_m \\ r_0 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}}_{=:\binom{s}{r}\in\mathbb{R}^{2m+2}} \qquad (9.19)$$

Dieses Gleichungssystem (9.19) ist genau dann eindeutig lösbar, wenn das homogene Gleichungssystem

$$A\cdot\alpha = 0 \qquad \left(0 = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2m+2}\right) \qquad (9.20)$$

nur die triviale Lösung (d.h. $\alpha=0$) besitzt. (Denn in diesem Fall ist A invertierbar, d.h. $A^{-1}\in\mathbb{R}^{2m+2}$ existiert und die Lösung der inhomogenen Gleichung (9.19) lässt sich aus

$$A\cdot\alpha = b \underset{\exists A^{-1}}{\Longrightarrow} \alpha = A^{-1}A\alpha \underset{(9.19)}{=} A^{-1}b$$

gewinnen.) Daher bleibt zu zeigen, dass (9.20) nur die Lösung $\alpha\equiv 0$ besitzt:
In Bezug auf (9.19) gilt $\binom{s}{r}=\binom{0}{0}$ und somit für $p\in\mathcal{P}_{2m+1}$

$$p(t_i) = 0 \quad , i=0,\dots,m \qquad (9.21)$$

$$p'(t_i) = 0 \quad , i=0,\dots,m \qquad (9.22)$$

Nach dem

> **Satz von Rolle:** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ differenzierbar, $f(a)=f(b)$
> $\Longrightarrow \exists x_0\in]a,b[\,:\, f'(x_0)=0$

gilt (denn $p:[t_i,t_{i+1}]\to\mathbb{R}$ stetig, $p:]t_i,t_{i+1}[\to\mathbb{R}$ differenzierbar, $p(t_i)=p(t_{i+1})\underset{(9.21)}{=}0$, $i=0,\dots,m-1$)

$$\exists x_0\in]t_i,t_{i+1}[\,:\, p'(x_0)=0 .$$

Dies zusammen mit $\overset{\frown}{}$ (9.22) liefert insgesamt $m+m+1=2m+1$ Nullstellen für p'. Da (9.21) und
$p'\in\mathcal{P}_{2m}$ muss $p'\equiv 0$ gelten. Daraus folgt zunächst $p\equiv c\in\mathbb{R}$ und wegen (9.21) gilt $c=0$, also $p\equiv 0$. Somit ist $\alpha=0$ die einzige Lösung von (9.20). Die Existenz und Eindeutigkeit von (9.19) folgt aus der Existenz & Eindeutigkeit von (9.20).

---

zu (a): In Bezug auf (9.11) beachte man

$$p(t)\underset{(9.11)}{=}\sum_{j=0}^{m} s_j\cdot\underbrace{\left[\frac{\varrho_j(t)}{\varrho_j(t_j)}-\frac{\varrho_j'(t)}{\varrho_j(t_j)}\cdot\frac{\theta_j(t)}{\varrho_j(t_j)}\right]}_{\overset{!}{=}(1-2\cdot L_j'(t_j)\cdot(t-t_j))\cdot L_j^2(t) \;=:\; L_j^{(1)}(t)} + r_j\cdot\underbrace{\frac{\theta_j(t)}{\varrho_j(t_j)}}_{\overset{!}{=}(t-t_j)\cdot L_j^2(t)\;=:\;L_j^{(2)}(t)}$$

Die Eigenschaften (9.1) und (9.2) folgen nun aus

$$L_j^{(1)}(t_k)=\delta_{jk} \qquad L_j^{(2)}(t_k)=0$$

$$\left(\frac{d}{dt}L_j^{(1)}\right)(t_k)=0 \qquad \left(\frac{d}{dt}L_j^{(2)}\right)(t_k)=\delta_{jk}$$

$$\mathrm{grad}(L_j^{(1)})\leq 2m+1 \qquad \mathrm{grad}(L_j^{(2)})=2m+1$$