Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 4
06.05.2010

Abgabe: Freitag, 14.05.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 10: (Eigenschaften von Bézier-Kurven)
Sei $b(\cdot, b_0, \ldots, b_k) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ die durch die $k+1$ Punkte $b_0, \ldots, b_k \in \mathbb{R}^n$ gegebene Bézier-Kurve. Zeigen Sie:

(2) (a) Affine Invarianz: Ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affin lineare Abbildung, so ist

$$F(b(\cdot, b_0, b_1, \ldots, b_k)) = b(\cdot, F(b_0), F(b_1), \ldots, F(b_k)).$$

(2) (b) Bézier-Kurve liegt in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte: Es gilt

$$b(\cdot, b_0, b_1, \ldots, b_k) \subset \mathrm{co}(b_0, b_1, \ldots, b_k),$$

wobei $\mathrm{co}(b_0, b_1, \ldots, b_k)$ die konvexe Hülle der Punkte $b_0, b_1, \ldots, b_k$ bezeichnet.

(2) (c) Für $u, v \in \mathbb{R}^n$ sei die affin lineare Abbildung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$F(t) := u + tv, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Begründen Sie allein mit den Ihnen bekannten Eigenschaften von Bézier-Kurven (ohne Berechnung durch den de Casteljau-Algorithmus und ohne Verwendung der Darstellung mit Bernsteinpolynomen) den Verlauf von

$$b(\cdot, b_0, \ldots, b_k)$$

für die speziellen Daten

$$b_i = F(t_i) \quad \text{für} \quad i = 0, \ldots, k,$$

wobei $t_0 < t_k$ und $t_i \in (t_0, t_k)$ für $i = 1, \ldots, k-1$.

(6 Punkte)

Aufgabe 11: (Konvergenzgeschwindigkeit der Bézier-Approximation)
Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ hölderstetig zum Exponenten $\alpha \in (0,1]$, d. h.

$$\exists\, C_H = C_H(\alpha) > 0 \;\forall\, x_1, x_2 \in [0,1]: \quad \|f(x_1) - f(x_2)\|_2 \leqslant C_H \cdot |x_1 - x_2|^\alpha\,,$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Weiter sei $b(\cdot, f(t_0), \ldots, f(t_k))$ die durch die $k+1$ Punkte $f(t_0), \ldots, f(t_k)$ gegebene Bézier-Kurve, wobei die $t_i := \frac{i}{k}$ für $i = 0, \ldots, k$ die äquidistanten Stützstellen des Intervalls $[0,1]$ bezeichnen.
Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$\forall\, \alpha \in (0,1]\; \exists\, C = C(\alpha) > 0 \;\forall\, k \in \mathbb{N}: \quad \|f(\cdot) - b(\cdot, f(t_0), \ldots, f(t_k))\|_{[0,1]} \leqslant C \cdot k^{-\frac{\alpha}{2}},$$

wobei $\|g\|_{[0,1]} := \sup_{t\in[0,1]} \|g(t)\|_2$.

(6 Punkte)

Aufgabe 12: (Programmieraufgabe, Bézier-Kurven, Bernsteinpolynome)
Betrachten Sie die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(t) := \frac{(8\pi t - 4\pi)^2 \cdot \sin(32\pi t)}{10}$$

und die Datenpaare

$$b_i := (t_i, s_i)^T \quad \text{mit} \quad t_i := \frac{i}{m} \quad \text{und} \quad s_i := f(t_i) \quad \text{für} \quad i = 0, \ldots, m,$$

wobei $m+1$ die Anzahl der äquidistanten Stützstellen des Intervalls $[0,1]$ bezeichnet.

(3) (a) Schreiben Sie ein Programm zur Approximation der Funktion f mit Hilfe von Bézier-Kurven, das die Darstellung der Bézier-Kurven mit Bernsteinpolynomen verwendet.

(3) (b) Testen Sie Ihr Programm für die Parameterwerte $m = 10, 100, 1000$ und plotten Sie $f(t)$, $b(t, b_0, \ldots, b_m)$ sowie den Fehler $f(t) - b(t, b_0, \ldots, b_m)$ für $t \in [0,1]$.

Hinweis: Vergleichen Sie Ihre Resultate mit der NUMLAB-GUI: *Approximation mit Bézier-Kurven*.

(6 Punkte)

- Laufzeiteffizienz: Verwende Pascalsches Dreieck anstelle der Berechnung der Binomialkoeffizienten
- benötigt werden 2 Funktionen: Bernstein & Bezier

AUFGABE 10: (Eigenschaften von Bézier-Kurven)

zu (a): Sei $\mathcal{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affin lineare Abbildung, d.h.

$$\exists A \in \mathbb{R}^{n\times n} \wedge \exists v \in \mathbb{R}^n \; \forall x \in \mathbb{R}^n: \; \mathcal{F}(x) = A\cdot x + v \qquad (10.1)$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned}
& b(t, \mathcal{F}(b_0), \dots, \mathcal{F}(b_K)) \\
&\underset{\text{Skript (4.8)}}{=} \sum_{j=0}^{K} \mathcal{F}(b_j)\cdot B_j^K(t) \\
&\underset{\substack{\text{Def. von } \mathcal{F} \\ (10.1)}}{=} \sum_{j=0}^{K} (A\cdot b_j + v)\cdot B_j^K(t) \\
&= \sum_{j=0}^{K} A\cdot b_j\cdot B_j^K(t) + v\cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{K} B_j^K(t)}_{=1 \text{ (Teilung der Eins, vgl. Skript (4.6))}} \\
&= \left[\sum_{j=0}^{K} A\cdot b_j\cdot B_j^K(t)\right] + v \\
&\underset{\text{lin. von } A}{=} A\cdot\left[\sum_{j=0}^{K} b_j\cdot B_j^K(t)\right] + v \\
&\underset{\substack{\text{Def. von } \mathcal{F} \\ (10.1)}}{=} \mathcal{F}\left(\sum_{j=0}^{K} b_j\cdot B_j^K(t)\right) \\
&\underset{\text{Skript (4.8)}}{=} \mathcal{F}(b(t, b_0, \dots, b_K)) \quad \forall t \; \forall K \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

zu (b): Betrachte die konvexe Hülle der Kontrollpunkte $b_0, \dots, b_K$

$$co(b_0, \dots, b_K) := \left\{ \sum_{j=0}^{K} \alpha_j \cdot b_j \;\middle|\; \sum_{j=0}^{K} \alpha_j = 1 \text{ und } \alpha_j \geq 0 \;\forall j = 0, \dots, K \right\} \quad \forall K \in \mathbb{N}$$

Aus der Darstellung der Bézier-Kurve durch Bernsteinpolynome (vgl. Skript (4.8))

$$b_0^K(t) = b(t, b_0, \dots, b_K) = \sum_{j=0}^{K} b_j \cdot B_j^K(t) \quad \forall t \in [0,1] \; \forall K \in \mathbb{N}$$

erhalten wir mit $\alpha_j := B_j^K(t)$ für $j = 0, \dots, K$ aus den Eigenschaften der Bernsteinpolynome

$$B_j^K(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,1] \; \forall j = 0, \dots, K \; \forall K \in \mathbb{N} \qquad \left(\text{per Definition: } \forall t \in [0,1]: \; B_j^K(t) := \underbrace{\binom{K}{j}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{t^j}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(1-t)^{K-j}}_{\geq 0} \geq 0\right)$$

und

$$\sum_{j=0}^{K} B_j^K(t) \overset{=1}{} \quad \forall t \in [0,1] \; \forall K \in \mathbb{N}, \qquad \text{(Teilung der Eins)}$$

dass

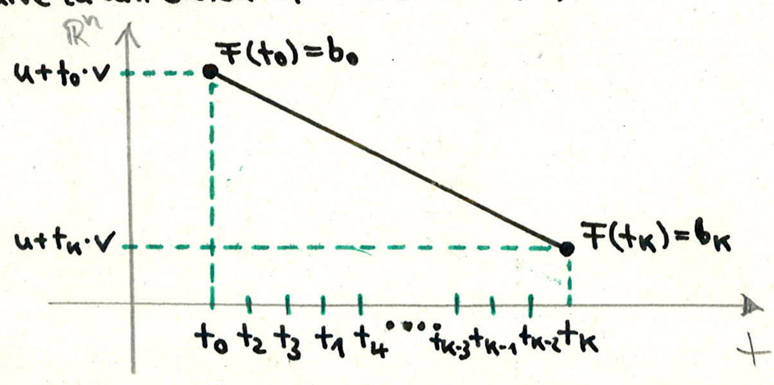
$$b_0^K(t) \in co(b_0, \dots, b_K) \quad \forall t \in [0,1] \; \forall K \in \mathbb{N}$$

und daher

$$b_0^K(\cdot) = b(\cdot, b_0, \dots, b_K) \subset co(b_0, \dots, b_K) \quad \forall K \in \mathbb{N}$$

zu (c): Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ affin linear definiert durch $\mathcal{F}(t) := u + t\cdot v$, $t \in \mathbb{R}$, und $t_0, \dots, t_K \in \mathbb{R}$ mit $t_0 < t_K$ und $t_i \in]t_0, t_K[$. Beachte: Wir fordern nicht $t_i < t_{i+1}$ für $i \in \{1, \dots, K-2\}$. $b(\cdot, b_0, \dots, b_K)$ Bézier-Kurve zu den Daten $b_i = \mathcal{F}(t_i) \; \forall i = 0, \dots, K$.

Betrachte die folgende Abbildung:



Behauptung: Die Bezier-Kurve $b(\cdot, b_0, \dots, b_K)$ ist die Verbindungsstrecke von $u + t_0 \cdot v$ nach $u + t_K \cdot v$, d.h.

$$b(\cdot, b_0, \dots, b_K) = \{(1-s)\cdot(u + t_0\cdot v) + s\cdot(u + t_K \cdot v) \mid s \in [0,1]\}$$

Nachweis: 1. Nach Aufgabenteil (b) wissen wir:

$$b(\cdot, b_0, \dots, b_K) \underset{(b)}{\subseteq} co(b_0, \dots, b_K) \underset{\substack{\uparrow \\ F(t_i) = b_i \\ \forall i = 0,\dots,K}}{=} co(F(t_0), \dots, F(t_K))$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ F \text{ affinlinear}}}{=} co(F(t_0), F(t_K)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def von } co}}{=} \left\{\alpha_0 \cdot F(t_0) + \alpha_1 \cdot F(t_K) \,\middle|\, \begin{array}{l}\alpha_0 + \alpha_1 = 1 \\ \alpha_0, \alpha_1 \geq 0\end{array}\right\}$$

$$= \{(1-\alpha_1)\cdot F(t_0) + \alpha_1 \cdot F(t_K) \mid \alpha_1 \in [0,1]\}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha_0 + \alpha_1 = 1 \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha_0 \geq 0}}{0 \leq} \alpha_0 = 1 - \alpha_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha_1 \geq 0}}{\leq} 1 \\ \overset{\cdot(-1)}{\Longrightarrow} 0 \geq \alpha_1 - 1 \geq -1 \\ \overset{+1}{\Longrightarrow} 1 \geq \alpha_1 \geq 0 \Longleftrightarrow \alpha_1 \in [0,1] \end{array}}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ F(t) = u + t\cdot v \\ \alpha_1 =: s}}{=} \{(1-s)\cdot(u + t_0 \cdot v) + s \cdot (u + t_K \cdot v) \mid s \in [0,1]\}$$

2. Wegen der Endpunkt-Interpolation gilt

$$b(t_0, b_0, \dots, b_K) = b_0 = F(t_0)$$
$$b(t_K, b_0, \dots, b_K) = b_K = F(t_K)$$

d.h. die Bézier-Kurve besitzt den Startpunkt b_0 und Endpunkt b_K. Da die Bézier-Kurve $b(\cdot, b_0, \dots, b_K) : [t_0, t_K] \to \mathbb{R}^n$ ein Polynom ist, gilt

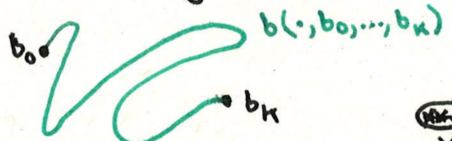
$$b(\cdot, b_0, \dots, b_K) : [t_0, t_K] \to \mathbb{R}^n \text{ ist stetig, } (*)$$

Wegen $b(\cdot, b_0, \dots, b_K) \subset \{(1-s) F(t_0) + s \cdot F(t_K) \mid s \in [0,1]\}$ folgt daraus

$$b(\cdot, b_0, \dots, b_K) = \{(1-s) F(t_0) + s \cdot F(t_K) \mid s \in [0,1]\}$$

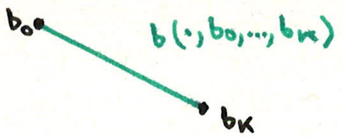
d.h. (**)

(*): d.h. insgesamt, dass der Graph $b(\cdot, b_0, \dots, b_K)$ den Startpunkt b_0 mit dem Endpunkt b_K stetig (und somit ohne Sprünge) verbindet. Das Szenario

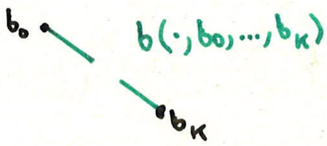


(***) ist wegen Schritt 1 nicht möglich.

(**):



(***): Das Szenario



ist wegen der Stetigkeit der Bézierkurve nicht möglich.

Zusatzfrage: Läuft die Bézier-Kurve nur in eine Richtung von b_0 nach b_K oder kann sie ihre Richtung kurzzeitig ändern?

AUFGABE 11: (Konvergenzgeschwindigkeit der Bézier-Kurve)

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ hölderstetig zum Exponenten $\alpha \in]0,1]$, d.h.

$$\exists C_H = C_H(\alpha) > 0 \ \forall x_1, x_2 \in [0,1]: \ \|f(x_1) - f(x_2)\|_2 \leqslant C_H \cdot |x_1 - x_2|^\alpha. \qquad (11.1)$$

Weiter bezeichne $b(\cdot, f(t_0), \dots, f(t_K))$ die durch die $K+1$ Punkte $f(t_0), \dots, f(t_K)$ gegebene Bézier-Kurve, wobei $t_i := \frac{i}{K}$ für $i = 0, \dots, K$ die äquidistanten Stützstellen des Intervalls $[0,1]$ sind. Zeige:

$$\forall \alpha \in]0,1] \ \exists C = C(\alpha) > 0 \ \forall K \in \mathbb{N}: \ \|f(\cdot) - b(\cdot, f(t_0), \dots, f(t_K))\|_{C([0,1],\mathbb{R}^n)} \leqslant C \cdot K^{-\frac{\alpha}{2}}$$

Beweis: (In Schritt 1 und 2 führen wir die notwendigen Hilfsmittel auf, die im Schritt 3, dem eigentlichen Beweis, benötigt werden)

① : LEMMA: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dann gilt für

(Die Hölder-Stetigkeit ist eine Verallgemeinerung der Lipschitz-Stetigkeit, denn hölderstetig mit $\alpha = 1$ entspricht der Lipschitz-Stetigkeit)

Ⓐ : $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ hölderstetig in D zum Exponenten $\alpha \in]0,1]$.

Ⓑ : $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gleichmäßig stetig in D

Ⓒ : $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig in D

$$Ⓐ \Rightarrow Ⓑ \ (\Rightarrow Ⓒ). \qquad (11.2)$$

Die Umkehrungen gelten i. A. nicht.

BEWEIS: (Ⓐ $\Rightarrow$ Ⓑ):

zz: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x_1, x_2 \in D$ mit $|x_1 - x_2| \leqslant \delta: \|f(x_1) - f(x_2)\|_2 \leqslant \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Definiere $\delta := \left(\frac{\varepsilon}{C_H}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, dann gilt

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_2 \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ hölderstetig}}}{\leqslant} C_H \cdot |x_1 - x_2|^\alpha \underset{\substack{\uparrow \\ |x_1 - x_2| \leqslant \delta \Rightarrow |x_1 - x_2|^\alpha \leqslant \delta^\alpha \\ \text{(denn: } x^\alpha \text{ ist streng mon. wachsend} \\ \text{für } x \geqslant 0 \text{ und } \alpha \in]0,1])}}{\leqslant} C_H \cdot \delta^\alpha$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. von } \delta}}{=} C_H \cdot \left(\left(\frac{\varepsilon}{C_H}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = \varepsilon \quad \forall x_1, x_2 \in D \text{ mit } |x_1 - x_2| \leqslant \delta$$

■

② : Seien $\varepsilon > 0$ und $t \in [0,1]$ beliebig aber fest gewählt, dann gilt wegen (11.1) und wegen der Inklusion (11.2) des Lemmas:

$$\overset{(11.1)}{\Longrightarrow} f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ hölderstetig (in } [0,1] \text{ zum Exponenten } \alpha \in]0,1])$$

$$\overset{(11.2)}{\Longrightarrow} f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ gleichmäßig stetig (in } [0,1])$$

d.h. (für unsere beliebigen, aber festen $\varepsilon > 0$ und $t \in [0,1]$) gilt

$$\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall t_i, t \in [0,1] \text{ mit } |t - t_i| \leqslant \delta: \ \|f(t) - f(t_i)\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad (11.3)$$

Beachte: Folgen wir dem Beweis des Lemmas, so erhalten wir

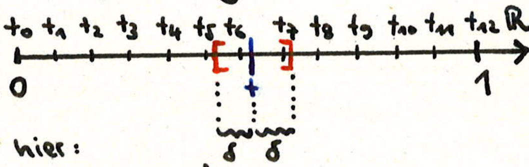
$$\delta := \left(\frac{\varepsilon}{2 C_H}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0 \qquad (11.4)$$

Definiere (für das beliebige, aber feste $t \in [0,1]$)

$$I := \{ i \in \{0, \dots, K\} \mid |t - t_i| \leqslant \delta \} \qquad (11.5)$$

$$J := \{ i \in \{0, \dots, K\} \mid |t - t_i| > \delta \} \qquad (11.6)$$

Abbildung 1:



hier:

$I = \{6, 7\}$

$J = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12\}$

③: Nun gilt (mit Hilfe der Eigenschaften für Bernsteinpolynome):

$$\| f(t) - b(t, f(t_0), \dots, f(t_K)) \|_2$$

$$= \| \underbrace{\sum_{i=0}^{K} B_i^K(t)}_{=1} \cdot f(t) - \sum_{i=0}^{K} f(t_i) \cdot B_i^K(t) \|_2$$

1. Teilung der 1
2. Darstellung d. Bézier-Kurve (vgl. Skript (4.8))

$$= \| \sum_{i=0}^{K} (f(t) - f(t_i)) \cdot B_i^K(t) \|_2$$

Beachte: In endlich-dimensionalen Räumen sind alle Normen äquivalent zueinander, d.h. z.B. für $\|\cdot\|_*$ und $\|\cdot\|_+$: $\exists c_1, c_2 > 0: c_1 \cdot \|\cdot\|_* \leq \|\cdot\|_+ \leq c_2 \cdot \|\cdot\|_*$

$$\underset{\Delta\text{'s Ungl.}}{\leq} \sum_{i=0}^{K} \| f(t) - f(t_i) \|_2 \cdot |B_i^K(t)|$$

$$\underset{B_i^K(t) \geq 0 \ \forall t \in [0,1]}{=} \sum_{i=0}^{K} \| f(t) - f(t_i) \|_2 \cdot B_i^K(t)$$

$$= \underbrace{\sum_{i \in I} \| f(t) - f(t_i) \|_2 \cdot B_i^K(t)}_{=: S_1} + \underbrace{\sum_{i \in J} \| f(t) - f(t_i) \|_2 \cdot B_i^K(t)}_{=: S_2}$$

$$= S_1 + S_2 \qquad (11.7)$$

Beachte: Um eine Konvergenzrate zu erhalten, müssen S_1 und S_2 in Abhängigkeit von K abgeschätzt werden.

zu S_1:

$$S_1 = \sum_{i \in I} \| f(t) - f(t_i) \|_2 \cdot B_i^K(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{i \in I} B_i^K(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{i=1}^{K} B_i^K(t) = \frac{\varepsilon}{2} \qquad (11.8)$$

(11.3): glm. Stetigkeit
(11.5): Def. von I

1. Ergänzung von Summanden
2. $B_i^K(t) \geq 0 \ \forall t \in [0,1]$

Teilung der Eins

zu S_2:

$$S_2 = \sum_{i \in J} \| f(t) - f(t_i) \|_2 \cdot B_i^K(t) \leq \sum_{i \in J} C_H \cdot |t - t_i|^\alpha \cdot B_i^K(t)$$

(11.1): f hölderstetig

$$< \sum_{i \in J} C_H \cdot |t - t_i|^\alpha \cdot \frac{|t - t_i|^{2-\alpha}}{\delta^{2-\alpha}} \cdot B_i^K(t)$$

(11.6) $\Rightarrow |t - t_i| > \delta \ (>0)$
$\Rightarrow |t - t_i|^{2-\alpha} > \delta^{2-\alpha}$ (denn: $\beta := 2 - \alpha \underset{\alpha \in]0,1]}{\geq} 1$ und x^β streng mon. wachsend für $x \geq 0$ und $\beta \geq 1$)
$\Rightarrow \frac{|t - t_i|^{2-\alpha}}{\delta^{2-\alpha}} > 1$

$$\leq \frac{C_H}{\delta^{2-\alpha}} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{K} (t - t_i)^2 \cdot B_i^K(t)}_{= \frac{t(1-t)}{K}} = \frac{C_H}{K} \cdot \delta^{\alpha - 2} \cdot \underbrace{t(1-t)}_{\leq \frac{1}{4} \ \forall t \in [0,1]}$$

1. Ergänzung von Summanden
2. $B_i^K(t) \geq 0 \ \forall t \in [0,1]$

Summierbarkeitseigenschaft

Kurvendiskussion

$$\leq \frac{C_H}{4K} \cdot \delta^{\alpha - 2} \underset{(11.4)}{=} \frac{C_H}{4K} \cdot \left(\left(\frac{\varepsilon}{2C_H} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\alpha - 2} \underset{\text{E1}}{=} \left(\frac{4 C_H^2}{8^\alpha \cdot K^\alpha \cdot \varepsilon^{2-\alpha}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \underset{!}{=} \frac{\varepsilon}{2} \qquad (11.9)$$

Frage: Wie muss K gewählt werden?

E1: (Umformung)

$$\frac{C_H}{4K} \left(\left(\frac{\varepsilon}{2C_H} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\alpha - 2} = \frac{C_H}{4K} \cdot \left(\left(\frac{\varepsilon}{2C_H} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\alpha} \cdot \left(\left(\frac{\varepsilon}{2C_H} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{-2} = \frac{\varepsilon \cdot \cancel{C_H}}{8 \cdot \cancel{C_H} \cdot K} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2C_H} \right)^{-\frac{2}{\alpha}} = \frac{\varepsilon}{8 \cdot K} \cdot \left(\frac{2C_H}{\varepsilon} \right)^{\frac{2}{\alpha}}$$

$$= \frac{\varepsilon}{8 \cdot K} \cdot \left(\frac{4 \cdot C_H^2}{\varepsilon^2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\varepsilon^\alpha}{8^\alpha \cdot K^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \left(\frac{4 \cdot C_H^2}{\varepsilon^2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{4 \cdot \varepsilon^\alpha \cdot C_H^2}{8^\alpha \cdot K^\alpha \cdot \varepsilon^2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{4 \cdot C_H^2}{8^\alpha \cdot K^\alpha \cdot \varepsilon^{2-\alpha}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Damit ! erfüllt ist, muss K wie folgt gewählt werden:

$$\left(\frac{4 C_H^2}{8^\alpha \cdot K^\alpha \cdot \varepsilon^{2-\alpha}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\varepsilon}{2} \underset{\text{E2}}{\iff} K = \left(4^{1-\alpha} \cdot C_H^2 \cdot \varepsilon^{-2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (11.10)$$

[E2: (Umformung)

$$\left(\frac{4C_H^2}{8^\alpha \cdot K^\alpha \cdot \varepsilon^{2-\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\varepsilon}{2} \iff \frac{4C_H^2}{8^\alpha \cdot K^\alpha \cdot \varepsilon^{2-\alpha}} = \frac{\varepsilon^\alpha}{2^\alpha} \iff \frac{2^{\alpha+2} \cdot C_H^2}{2^{3\alpha} \cdot \varepsilon^2} = K \iff K = 4^{1-\alpha} \cdot C_H^2 \cdot \varepsilon^{-2}$$]

(11.10) nach ε umgestellt ergibt:

$$K = \left(4^{1-\alpha} \cdot C_H^2 \cdot \varepsilon^{-2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \underset{E3}{\iff} \varepsilon = \underbrace{4^{\frac{1-\alpha}{2}}}_{=2^{1-\alpha}} \cdot C_H \cdot K^{-\frac{\alpha}{2}} \qquad (11.11)$$

[E3: (Umformung)

$$K = \left(4^{1-\alpha} \cdot C_H^2 \cdot \varepsilon^{-2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \iff K^\alpha = 4^{1-\alpha} \cdot C_H^2 \cdot \varepsilon^{-2} \iff \varepsilon^2 = 4^{1-\alpha} \cdot C_H^2 \cdot K^{-\alpha} \iff \varepsilon = 4^{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot C_H \cdot K^{-\frac{\alpha}{2}}$$]

Aus (11.7), (11.8), (11.9) und (11.11) erhalten wir

$$\|f(t) - b(t, f(t_0), \dots, f(t_K))\|_2 \underset{(11.7)}{\leq} S_1 + S_2 \underset{\substack{(11.8)\\(11.9)}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \underset{(11.11)}{=} 4^{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot C_H \cdot K^{-\frac{\alpha}{2}} \quad \forall t \in [0,1]$$

und somit

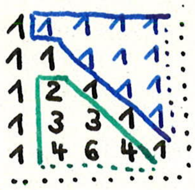
$$\|f(\cdot) - b(\cdot, f(t_0), \dots, f(t_K))\|_{C([0,1],\mathbb{R}^n)} \leq \underbrace{4^{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot C_H}_{=:C=C(\alpha)>0} \cdot K^{-\frac{\alpha}{2}} \qquad \blacksquare$$

```
function aufgabe12
    m=10;               % m+1=Anzahl der Stuetzstellen (Kontrollpunkte)
                        % (Aufgabe: m=10,100,1000)
    t=0:1/m:1;          % t=Stuetzstellen
    s=f(t);             % s=Funktionsauswertungen von f an den Stuetzstellen t
    b=s;                % b=Kontrollpunkte der Bezier-Kurve
    k=m;                % k=m=Anzahl der Stuetzstellen (Kontrollpunkte)
    eval=1000;          % eval=Anzahl der Funktionsauswertungen beim plotten

    % ---------------------
    % |    BERECHNUNGEN    |
    % ---------------------
    % Berechnung des Pascalschen Dreiecks (fuer die Binomialkoeffizienten)
    % A(k,i) = (k ueber i)
    % Zweck: Laufzeiteffizienz
    A=ones(m+1,m+1);
    for i=3:m+1
        for j=2:i-1
            A(i,j)=A(i-1,j-1)+A(i-1,j);
        end
    end
    % Auswertungsstellen fuer die Funktion f, dem Bezier-Polynom und des
    % Fehlers
    x=0:1/(eval-1):1;

    % ------------------
    % |    AUSGABEN    |
    % ------------------
    figure
    % Plot der Funktion f
    plot(x,f(x),'r', ...
                'LineWidth',2);
    hold on
    % Plot der Funktion f ausgewertet an den Kontrollstellen
    plot(t,f(t),'o', ...
                'LineWidth',3, ...
                'MarkerEdgeColor','r', ...
                'MarkerFaceColor','r');
    % Plot der Bezier-Kurve
    plot(x,bezier(k,0,x,b,A),'b','LineWidth',3);
    title('Bezier-Approximation durch Bernsteinpolynome');
    legend('f(t)=(8\pi t-4pi)^2sin(32\pi t)/10',...
           'b_i=Kontrollpunkte',...
           'b(t)=Bezier-Kurve',...
           'Location','North');
    xlabel('x');
    ylabel('y');
    axis tight;
    hold off

    figure
    plot(x,f(x)-bezier(k,0,x,b,A),'b');
    title('Fehler der Bezier-Approximation durch Bernsteinpolynome');
    axis tight;
```



```
    % ----------------
    % |    ANHANG      |
    % ----------------
    % Funktion f:
    function y = f(t)
        y = (8*pi*t-4*pi).^2.*sin(32*pi*t)./10;
    end

    % Bernstein-Polynom: (siehe Skript (4.2) in Abs. 4.1.5)
    function y = bernstein(k,i,t,A)
        y=A(k+1,i+1)*t.^i.*(1-t).^(k-i);
        % Zwei Alternativen:
        % 1. Moeglichkeit: Hier jedoch Vorsicht
        %y=(factorial(k))/(factorial(i)*factorial(k-i))*t.^i.*(1-t).^(k-i);
        % funktioniert fuer grosse k (d.h. etwa k>100) nicht mehr, da
        % k!=NaN ergibt.
        % 2. Moeglichkeit: Zur Berechnung jedes Bernsteinpolynoms muss
        % eine for-Schleife durchlaufen werden:
        %for j=1:i
        %    y=y*(k+1-j)/j;
        %end
    end
```

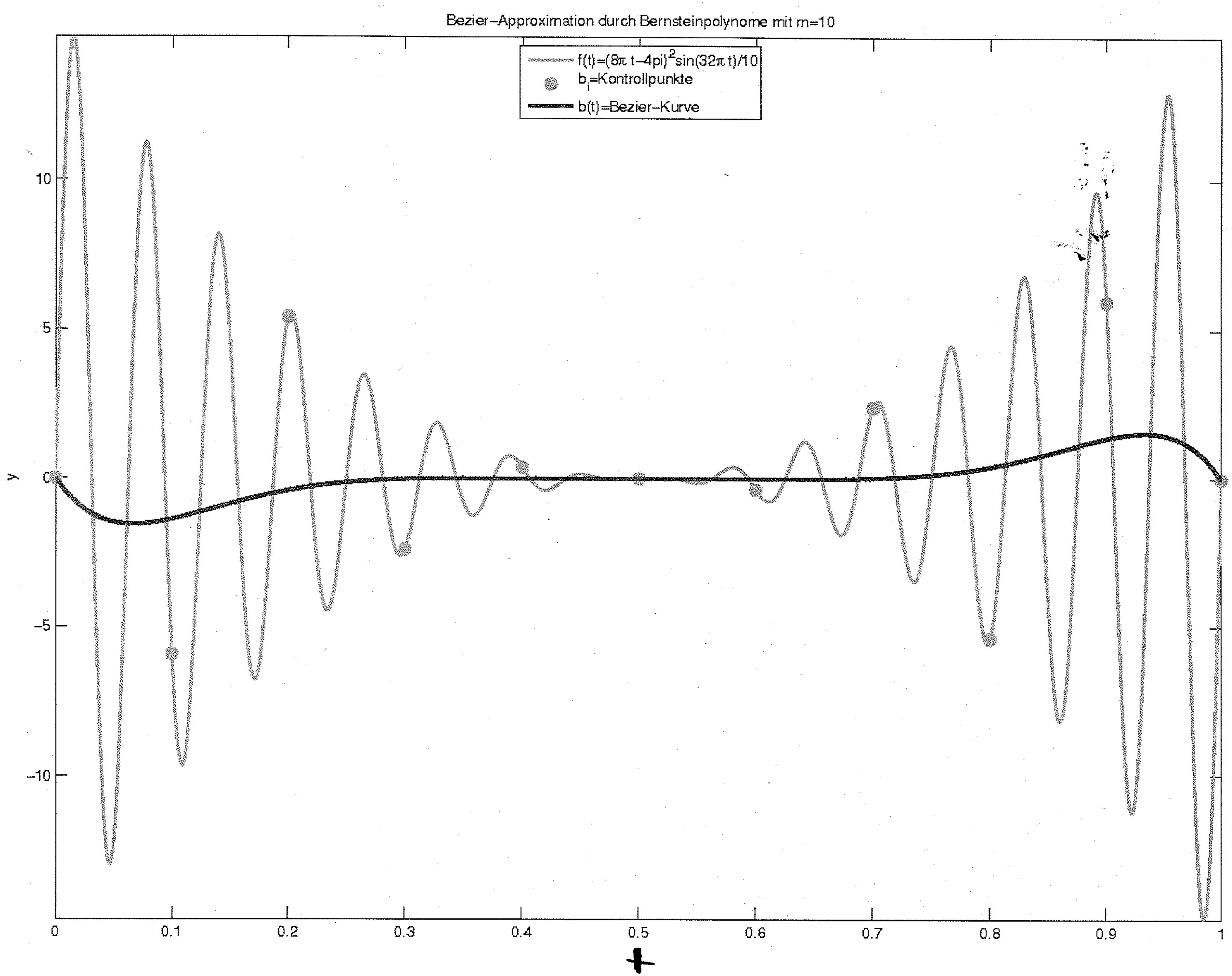
$$B_i^k(t) := \underbrace{\binom{k}{i}}_{:= \begin{cases} \binom{k}{i}, & 0 \le i \le k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}} \cdot t^i \cdot (1-t)^{k-i}$$

```
    % Bezier-Kurve: (siehe Skript (4.7) in Abs. 4.1.6)
    function y = bezier(r,i,t,b,A)
        sum=0;
        for j=0:r
            sum=sum+b(i+j+1)*bernstein(r,j,t,A);
        end
        y=sum;
    end
end
```

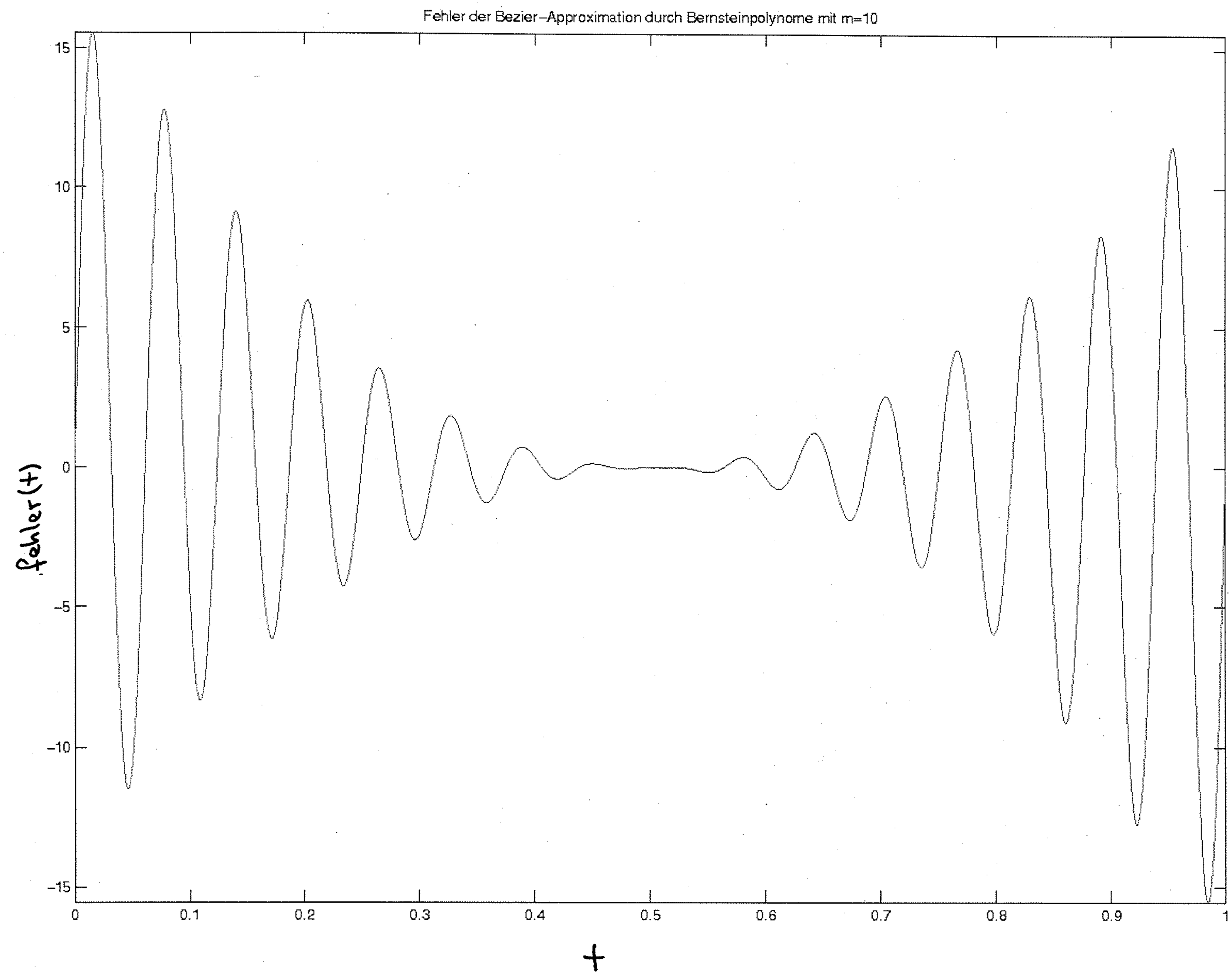
$$b_i^r(t) := \sum_{j=0}^{r} b_{i+j} \cdot B_j^r(t), \quad r = 0, \dots, k, \quad i = 0, \dots, k-r$$

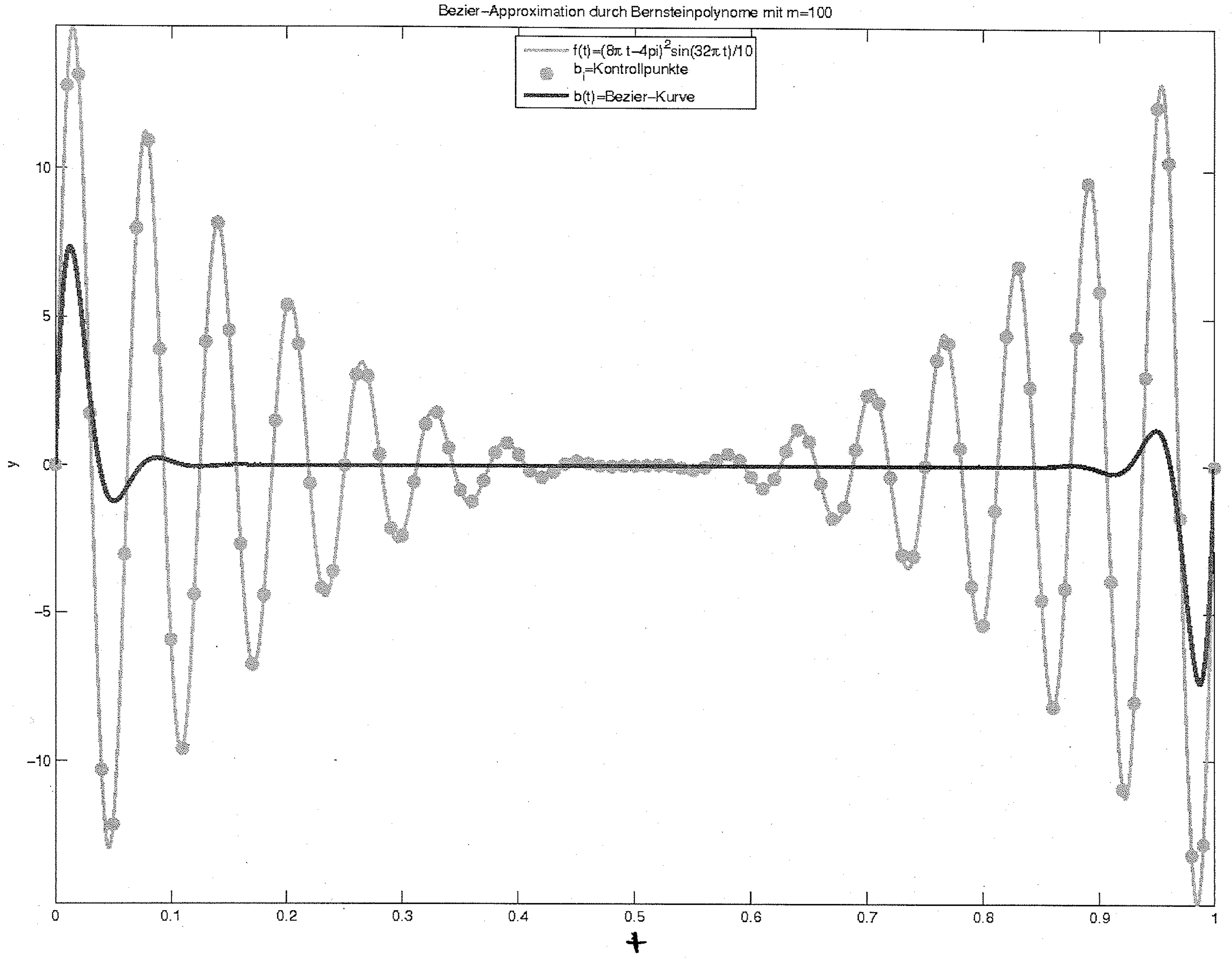
Beobachtungen:

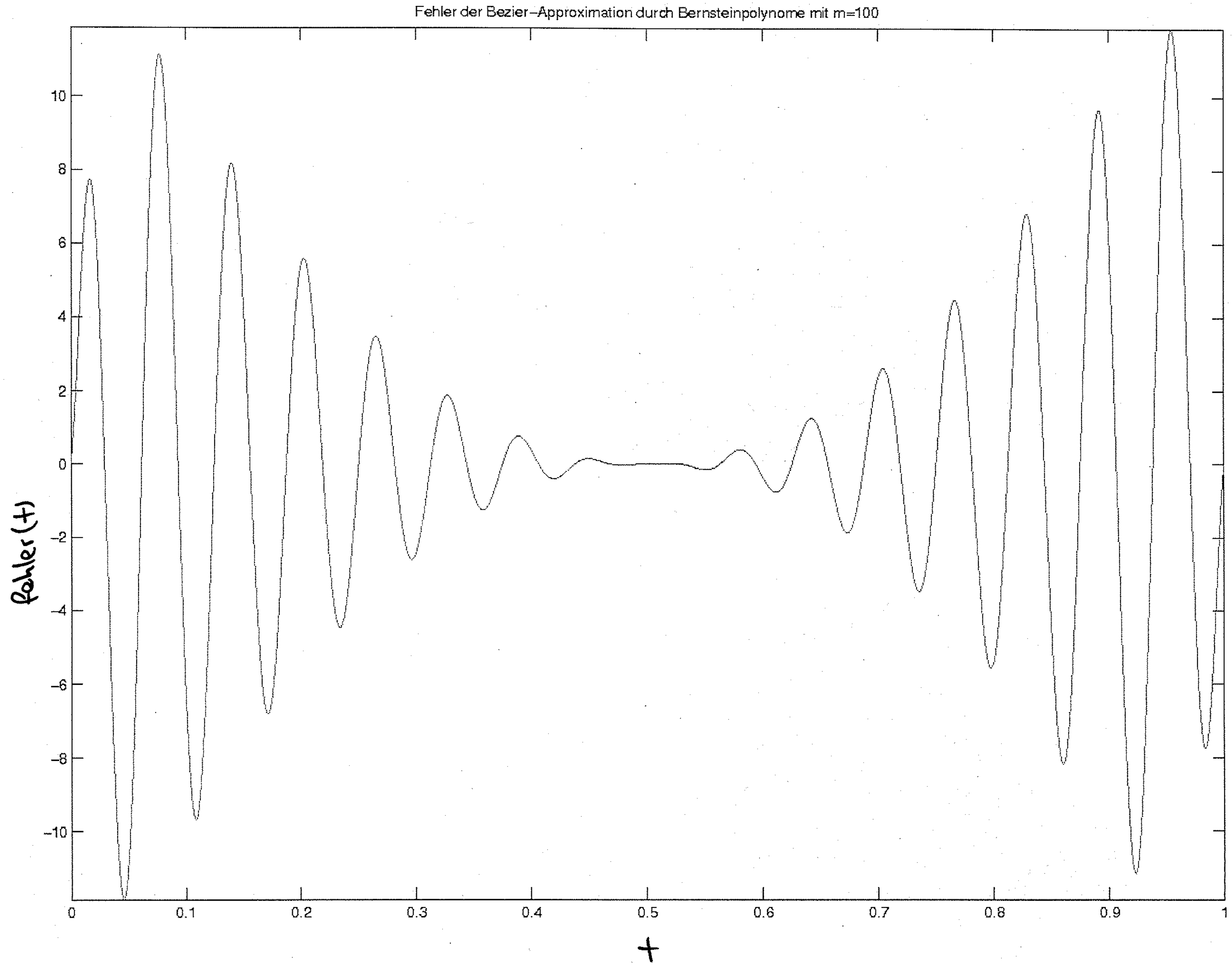
1. Die Funktion f wird durch die Bézier-Kurve (für große m) deutlich besser approximiert, als mittels des Interpolationspolynoms in Aufgabe 8.
   Der Fehlervergleich zeigt etwa:
   - Fehler der Bézier-Approximation ≈ 4 (bei $m = 1000$)
   - Fehler des Interpolationspolynoms $\approx 12 \approx 10^1$ (bei 5 Stützstellen) $\leadsto$ Oszillationen
2. Bei der Bézier-Approximation erhalten wir für wachsendes m einen zunehmend kleineren Fehler. Jedoch sind (wegen der Binomialkoeffizienten in den Bernsteinpolynomen) die Grenzen ~~[illegible]~~ der Berechnung bei $m = 1029$ erreicht, da das Pascalsche Dreieck den Eintrag „infinity" enthält.
3. Der größte Fehler tritt nach wie vor ~~[illegible]~~ in der Nähe des Randes von $[0,1]$ auf.

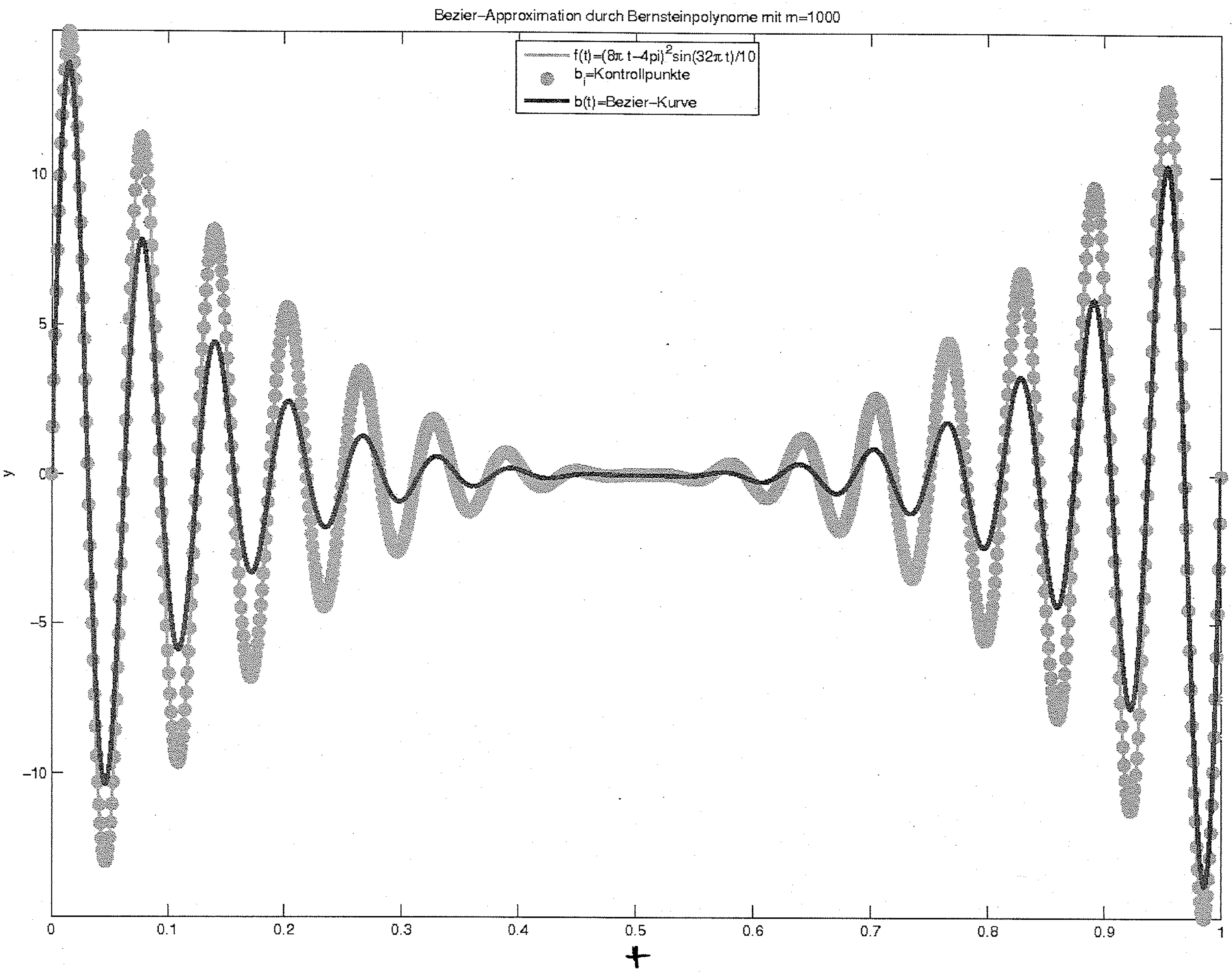


Bezier–Approximation durch Bernsteinpolynome mit m=10
f(t)=(8π t–4pi)^2sin(32π t)/10
b_i=Kontrollpunkte
b(t)=Bezier–Kurve
y
10
5
0
–5
–10
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


Fehler der Bezier-Approximation durch Bernsteinpolynome mit m=10
fehler(t)
t
15
10
5
0
-5
-10
-15
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


Bezier-Approximation durch Bernsteinpolynome mit m=100
f(t)=(8π t−4pi)^2 sin(32π t)/10
b_i=Kontrollpunkte
b(t)=Bezier-Kurve
y
10
5
0
-5
-10
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
t


Fehler der Bezier-Approximation durch Bernsteinpolynome mit m=100
fehler(t)
t
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


Bezier-Approximation durch Bernsteinpolynome mit m=1000
f(t)=(8π t-4pi)^2sin(32π t)/10
b_i=Kontrollpunkte
b(t)=Bezier-Kurve
10
5
0
-5
-10
y
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
t

Fehler der Bezier-Approximation durch Bernsteinpolynome mit m=1000