Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 5
11.05.2010

Abgabe: Donnerstag, 20.05.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 13: (Numerische Differentiation, Interpolatorischer Ansatz)
Sei

$$\ell_m(f) = \sum_{j=0}^{m} w_j f(t_j), \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ glatt}$$

die interpolatorische Differentiationsformel für $f'(0)$ zu den paarweise verschiedenen Stützstellen t_j für $j = 0, \ldots, m$, wobei $w_j := L_j'(0)$.
Man zeige:

(a) Liegen die Stützstellen symmetrisch zur 0, d. h.

$$t_{m-j} = -t_j, \quad j = 0, \ldots, m, \tag{1}$$

so gilt $w_j = -w_{m-j}$ für $j = 0, \ldots, m$.

(b) Ist zusätzlich m ungerade, so stimmt die Differentiationsformel ℓ_m überein mit der interpolatorischen Differentiationsformel

$$\widetilde{\ell}_{m+1}(f) = \sum_{j=0}^{m+1} \widetilde{w}_j f(t_j)$$

zu den Stützstellen $t_0, \ldots, t_m$ aus Aufgabenteil (a) und der zusätzlichen Stelle $t_{m+1} = 0$.
Hinweis: Man zeige als Zwischenschritt, dass zwei Differentiationsformeln

$$\ell_m^{(i)}(f) = \sum_{j=0}^{m} w_j^{(i)} f(t_j)$$

mit $i = 1, 2$ zu den gleichen, paarweise verschiedenen Stützstellen $t_0, \ldots, t_m$ bereits übereinstimmen müssen, falls $\ell_m^{(1)}$ und $\ell_m^{(2)}$ Polynome vom Grad m exakt differenzieren.

(c) Folgern Sie aus Aufgabenteil (b), dass $\ell_m(f)$ (mit den symmetrischen Stützstellen (1)) in diesem Fall Polynome bis zum Grad $m+1$ an der Stelle $\bar{t}=0$ exakt differenziert, d. h.

$$\ell_m(f) = f'(0) \quad \forall f \in \mathcal{P}_{m+1}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 14: (Programmieraufgabe, Numerische Differentiation, Höhere Ableitungen)
Wir wollen mit Hilfe des Computers das Verhalten der numerischen Approximation höherer Ableitungen untersuchen.
Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\bar{t} \in (a,b)$ und Stützstellen $t_0, \ldots, t_m \in [a,b]$ haben wir in der Vorlesung bereits gesehen, dass die zugehörige interpolatorische Differentiationsformel $\ell_{m,m}(f)$ folgende Beziehung erfüllt

$$\ell_{m,m}(f) = m!\, a_m. \tag{2}$$

Dabei bezeichnet $a_m = d_{m,m}$ die m-te dividierte Differenz, siehe Kapitel 3.4 im Skript.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe von (2) für $m = 1, \ldots, 6$ die Differentiationsformeln $\ell_{m,m}$ für $f(t) = \sin(t)$ zu den Daten $\bar{t} = \frac{1}{2}$,

$$t_0 = \bar{t} - h, \quad t_m = \bar{t} + h$$

und äquidistant verteilten Zwischenstellen t_i für $i = 1, \ldots, m-1$.

(b) Zeichnen Sie für jedes m den Fehler

$$|\ell_{m,m}(f) - f^{(m)}(\bar{t})|$$

in Abhängigkeit von h zu den Werten $h = 10^{-8+j}$, $j = 0, \ldots, 8$ in ein doppelt logarithmisches Diagramm.

(c) Vergleichen Sie die Plots und kommentieren Sie die Ergebnisse.

(6 Punkte)

Aufgabe 13:

Gegeben: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt

t_j paarweise verschiedene Stützstellen $(j = 0, \dots, m)$

$$f'(0) \overset{\text{approx.}}{\approx} l_m(f) := \sum_{j=0}^{m} w_j f(t_j)$$ interpolatorische Differentialformel $(\bar{t} = 0)$ (vgl. Skript (5.21))

wobei $w_j = L_j'(0)$ und $L_j(t)$ Lagrangesches Basispolynom

zu (a):

$$\text{zz}: \ t_{m-j} = -t_j \ \forall j = 0, \dots, m \ \Rightarrow \ w_j = -w_{m-j} \ \forall j = 0, \dots, m \qquad (13.1)$$

Betrachte das Lagrangesche Basispolynom

$$L_j(t) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} \frac{t - t_i}{t_j - t_i}, \quad j = 0, \dots, m,$$

dann gilt nach Voraussetzung in (13.1)

$$L_j(t) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} \frac{t - t_i}{t_j - t_i} \underset{\substack{\uparrow \\ (-1) \text{ im Zähler} \\ \& \text{ Nenner kürzen}}}{=} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} \frac{t_i - t}{t_i - t_j} \underset{\substack{\uparrow \\ (13.1), \text{ d.h.} \\ t_i = -t_{m-i} \\ t_j = -t_{m-j}}}{=} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} \frac{-t_{m-i} - t}{-t_{m-i} + t_{m-j}}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Reihenfolge} \\ \text{vertauschen}}}{=} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq m-j}}^{m} \frac{(-t) - t_i}{t_{m-j} - t_i} =: L_{m-j}(-t) \quad \forall t \ \forall j = 0, \dots, m$$

und nach Differentiation beider Seiten nach t

$$L_j'(t) = \frac{d}{dt} L_j(t) = \frac{d}{dt} L_{m-j}(-t) = -L_{m-j}'(-t) \quad \forall t \ \forall j = 0, \dots, m$$

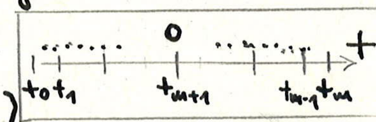
und speziell für $t = 0$

$$w_j = L_j'(0) = -L_{m-j}'(0) = -w_{m-j} \quad \forall j = 0, \dots, m$$

zu (b):

$$\text{zz}: \left.\begin{array}{l} ①: t_{m-j} = -t_j \ \forall j = 0, \dots, m \\ ②: m \text{ ungerade} \end{array}\right\} \Rightarrow l_m = \tilde{l}_{m+1} := \sum_{j=0}^{m+1} \tilde{w}_j f(t_j)$$

mit $t_{m+1} = 0$



Hinweis: Zeige dazu

$$\left.\begin{array}{l} ①: t_0, \dots, t_m \text{ paarweise verschiedene Stützstellen} \\ ②: l_m^{(i)}(f) = \sum_{j=0}^{m} w_j^{(i)} f(t_j) \text{ Differentiationsformel, } i = 1, 2 \\ ③: l_m^{(1)}, l_m^{(2)} \text{ differenzieren Polynome vom Grad} \leq m \text{ exakt} \end{array}\right\} \Rightarrow l_m^{(1)} = l_m^{(2)}$$

Hinweis: Durch Einsetzen der Lagrange-Basispolynome (zu den paarweise verschiedenen Stützstellen $t_0, \dots, t_m$, vgl. ① $\rightsquigarrow$ sonst Nenner $= 0$)

$$L_j(t) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} \frac{t - t_i}{t_j - t_i}, \quad j = 0, \dots, m,$$

für die offensichtlich $\text{Grad}(L_j) = m$ $(j = 0, \dots, m)$ gilt, in die linearen Funktionale $l_m^{(1)}$ und $l_m^{(2)}$ erhalten wir (wegen $L_j(t_i) = \delta_{ij} \ \forall i,j = 0, \dots, m$)

$$L_k'(\bar{t}) \underset{\substack{\text{Grad}(L_k) = m, ③ \\ l_m^{(1)} \text{ diff. } L_k \text{ exakt} \\ (\text{da } L_k \text{ Polynom vom Grad } m)}}{\overset{\text{Exaktheit}}{=}} l_m^{(1)}(L_k) \underset{②}{:=} \sum_{j=0}^{m} w_j^{(1)} \cdot L_k(t_j) \underset{\substack{\uparrow \\ L_k(t_j) = \delta_{jk}}}{=} \sum_{j=0}^{m} w_j^{(1)} \cdot \underbrace{\delta_{jk}}_{= \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}} = w_k^{(1)}$$

$$L_k'(\bar{t}) \underset{\substack{\text{Grad}(L_k) = m, ③ \\ l_m^{(2)} \text{ diff. } L_k \text{ exakt} \\ (\text{da } L_k \text{ Polynom vom Grad } m)}}{=} l_m^{(2)}(L_k) \underset{②}{:=} \sum_{j=0}^{m} w_j^{(2)} \cdot L_k(t_j) \underset{\substack{\uparrow \\ L_k(t_j) = \delta_{jk}}}{=} \sum_{j=0}^{m} w_j^{(2)} \cdot \underbrace{\delta_{jk}}_{= \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}} = w_k^{(2)}$$

$\forall k = 0, \dots, m$

$$\Rightarrow \; l_m^{(1)}(f) \underset{②}{:=} \sum_{j=0}^{m} w_j^{(1)} f(t_j) \underset{\substack{\uparrow \\ w_j^{(1)} = w_j^{(2)} \; \forall j=0,\dots,m}}{=} \sum_{j=0}^{m} w_j^{(2)} f(t_j) \underset{②}{=:} l_m^{(2)}(f) \qquad \forall f$$

$$\Rightarrow \; l_m^{(1)} = l_m^{(2)}$$

Somit haben wir den Hinweis gezeigt.

Zurück zur Aufgabe: Betrachte die interpolatorische Differentiationsformel

$$\tilde{l}_{m+1}(f) := \sum_{j=0}^{m+1} \tilde{\omega}_j \cdot f(t_j) \qquad \text{mit } t_{m+1} = 0 \text{ und } m \in \mathbb{N} \text{ ungerade}$$

Aus der Vorlesung (vgl. Abs. 5.1 und dort (5.2)) wissen wir, dass das Funktional $\tilde{l}_{m+1}$ Polynome vom Grad $m+1$ exakt differenziert.

BEMERKUNG: Im Allgemeinen gilt für Funktionen $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ nur

$$l_m(f) \approx f'(\bar{t}) \quad , \text{ für } \bar{t} \in [a,b]$$

d.h. die interpolatorische Diff.formel stimmt nur bis auf einen kleinen Fehler mit f' im Punkt $\bar{t} \in [a,b]$ überein.
Handelt es sich bei f jedoch zusätzlich um ein Polynom vom Grad $\leq m$, so gilt

$$l_m(f) = f'(\bar{t}) \quad , \text{ für } \bar{t} \in [a,b] \qquad \text{(EXAKTHEIT)}$$

d.h. $l_m(f)$ stimmt ~~ungefähr~~ mit der Ableitung von f (für jeden beliebigen Punkt $\bar{t} \in [a,b]$) exakt überein.

Speziell für die konstante Funktion $\mathbb{1}(t) := 1$, die als Polynom vom Grad $0 \leq m+1$ von $\tilde{l}_{m+1}$ exakt differenziert wird, gilt

Beachte, dass $\tilde{\omega}_{m+1}$ nur von $\bar{t} = 0$ und nicht von der Funktion selbst abhängt!

$$0 = \mathbb{1}'(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Exaktheit}}}{=} \tilde{l}_{m+1}(\mathbb{1}) := \sum_{j=0}^{m+1} \tilde{\omega}_j \cdot \underbrace{\mathbb{1}(t_j)}_{=1 \; \forall j=0,\dots,m+1} = \sum_{j=0}^{m+1} \tilde{\omega}_j$$

$$\underset{\uparrow}{=} \left(\sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} \tilde{\omega}_j \right) + \left(\sum_{j=\frac{m+1}{2}}^{m} \tilde{\omega}_j \right) + \tilde{\omega}_{m+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{umnummerieren}}}{=} \left(\sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} \tilde{\omega}_j \right) + \left(\sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} \tilde{\omega}_{m-j} \right) + \tilde{\omega}_{m+1}$$

②: m ungerade
$\Rightarrow m-1, m+1$ gerade
$\Rightarrow \frac{m-1}{2}, \frac{m+1}{2} \in \mathbb{N}_0$

$$\underset{\uparrow}{=} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} \tilde{\omega}_j \right) - \left(\sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} \tilde{\omega}_j \right)}_{=0} + \tilde{\omega}_{m+1} = \tilde{\omega}_{m+1}$$

①: $t_{m-j} = -t_j \; \forall j = 0,\dots,m$
$\underset{(a)}{\Rightarrow} \tilde{\omega}_j = -\tilde{\omega}_{m-j} \; \forall j = 0,\dots,m$

Damit erfüllen die interpolatorischen Differentialformeln

$$l_m(f) = \sum_{j=0}^{m} \omega_j \cdot f(t_j) =: l_m^{(1)}(f)$$

$$\tilde{l}_{m+1}(f) = \sum_{j=0}^{m} \tilde{\omega}_j \cdot f(t_j) =: l_m^{(2)}(f)$$

die Voraussetzungen des Hinweises ($t_0, \dots, t_m$ paarweise verschieden & $l_m^{(1)}$ sowie $l_m^{(2)}$ diff. Polynome vom Grad $\leq m$ exakt) und demnach gilt

$$l_m = \tilde{l}_{m+1}$$

Da $\tilde{l}_{m+1}$ Polynome vom Grad $\leq m+1$ exakt differenziert, gilt dies (wegen der Gleichheit) nun auch für l_m, d.h. l_m differenziert Polynome vom Grad $\leq m+1$ exakt.

zu (c):

Aufgabe 14:

Interpretation:

1. m groß $\Rightarrow$ Fehler explodieren

   (Grund: m-fache Auslöschung bei Approximation der m-ten Ableitung.
   Beachte: Die Berechnung hoher Ableitungen ist schlecht konditioniert.)

2. h sehr klein $\Rightarrow$ Fehler groß
   (Grund: Rundungsfehler)

   h sehr groß $\Rightarrow$ Fehler groß
   (Grund: Approximationsfehler der Ableitung)

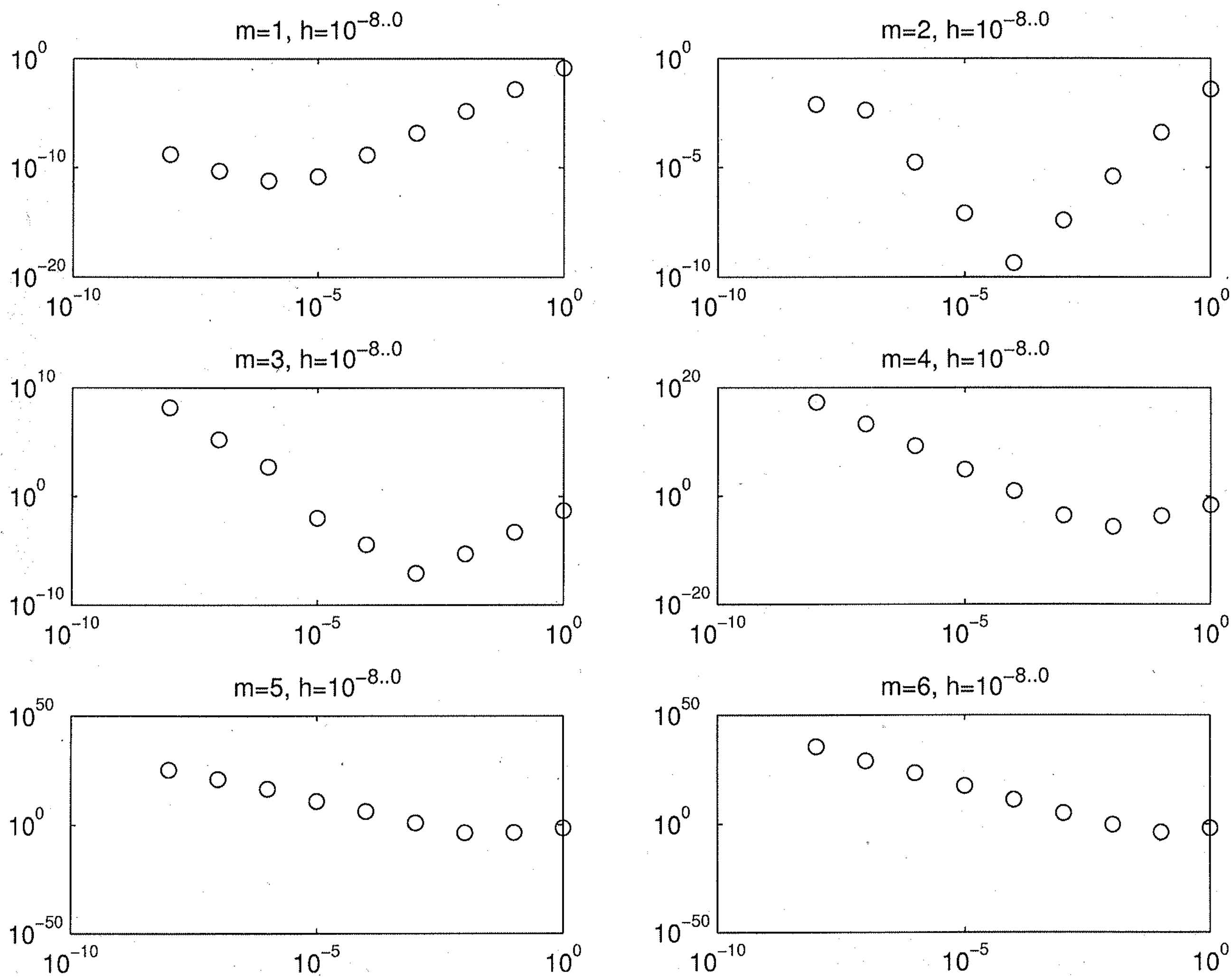
   unabhängig von der Wahl von m

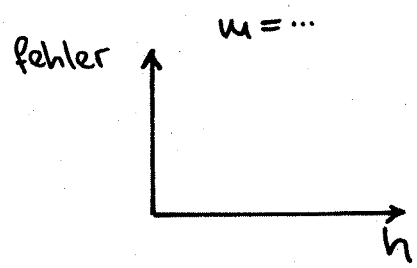
```
function fehler=aufgabe14
    tquer = 1/2;
    n = 8;
    format long
    fehler = zeros(10,n+1);
    for m=1:6
        if mod(m,4)==0
            exact = f1(tquer);
        elseif mod(m,4)==1
            exact = f2(tquer);
        elseif mod(m,4)==2
            exact = -f1(tquer);
        else
            exact = -f2(-tquer);
        end
        for j=0:n
            h=10^(-j);
            t = (tquer-h):((2*h)/m):(tquer+h);
            a = div_diff(f1(t),t);
            fehler(m,j+1) = abs(exact-a(end)*factorial(m));
        end
        subplot(3,2,m)
        loglog(10.^(-(0:n)),fehler(m,:),'o')
        title(char(['m=', int2str(m), ', h=10^{-8..0}']));
    end
end

% Funktion:
function y = f1(t)
    y = sin(t);
end

% Funktion: (fuer die Ableitung von f1)
function y = f2(t)
    y = cos(t);
end

% Dividierte Differenzen:
function a=div_diff(s,t)
    m=length(s);
    d=zeros(m,m);          % Matrix mit den dividierten Differenzen
    d(:,1)=s;              % Initialisierung der dividierten Differenzen
    for j=2:m
        for i=j:m
            d(i,j)=(d(i,j-1)-d(i-1,j-1))/(t(i)-t(i-j+1));
        end
    end
    a=diag(d);
end
```


m=1, h=10^-8..0
10^0
10^-10
10^-20
10^-10
10^-5
10^0
m=2, h=10^-8..0
10^0
10^-5
10^-10
10^-10
10^-5
10^0
m=3, h=10^-8..0
10^10
10^0
10^-10
10^-10
10^-5
10^0
m=4, h=10^-8..0
10^20
10^0
10^-20
10^-10
10^-5
10^0
m=5, h=10^-8..0
10^50
10^0
10^-50
10^-10
10^-5
10^0
m=6, h=10^-8..0
10^50
10^0
10^-50
10^-10
10^-5
10^0


m = ...
fehler
h