Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 7
27.05.2010

Abgabe: Freitag, 04.06.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 18: (Numerische Integration, Newton-Cotes-Formeln)
Sei

$$Q_m(f) = \frac{b-a}{m} \sum_{j=0}^{m} \sigma_j^m f(t_j)$$

die aus der Vorlesung bekannte Newton-Cotes-Formel für $\int_a^b f(t)dt$.

(2) (a) Bestimmen Sie eine Quadraturformel $Q_{m,m}(f)$ für das Doppelintegral

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(s,t)\, ds \right) dt,$$

die auf der zweifachen Verwendung der Newton-Cotes-Formel beruht.

(2) (b) Welche Polynome der Form

$$p(s,t) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} a_{ij} s^i t^j, \quad k,l \in \mathbb{N}_0,\ a_{ij} \in \mathbb{R}$$

werden durch diese Formel exakt integriert?

(2) (c) Welches Ergebnis liefert $Q_{1,1}(f)$ sowie $Q_{2,2}(f)$ im Beispiel

$$\int_0^1 \int_{-1}^5 4t + 2s^3 + 3t^2 s^2 \, ds\, dt\ ?$$

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem exakten Integralwert.

(6 Punkte)

Aufgabe 19: (Programmieraufgabe, Numerische Integration, Romberg-Verfahren)

(4) (a) Approximieren Sie die Integrale

$$\int_{t_0}^{3} (t-1)^{\frac{1}{5}}\, dt$$

für $t_0 = 1.2, 1.005, 1$, indem Sie für die numerische Integration das Romberg-Verfahren mit den ersten 10 Trapezsummen ($k = 9$) verwenden.
Wir bezeichnen den Fehler eines Eintrags $T_{n,j}$ des Romberg-Schemas mit

(1) Implementierung

$$e(n, j; t_0) := \left| T_{n,j} - \int_{t_0}^{3} (t-1)^{\frac{1}{5}}\, dt \right|, \quad 0 \leq j \leq n \leq k.$$

Erstellen Sie zu den folgenden numerischen Tests übersichtliche Tabellen:

(1) (i) Berechnen Sie für jedes obige t_0 die Fehler der ersten Spalte des Romberg-Schemas

$$e(n, 0; t_0), \ n = \overset{0}{1}, \ldots, k.$$

Geben Sie auch das Verhältnis der Fehler

$$\frac{e(n, 0; t_0)}{e(n+1, 0; t_0)}, \ n = \overset{0}{1}, \ldots, k-1$$

aus und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der theoretisch zu erwartenden Konvergenzordnung.

(1) (ii) Wiederholen Sie diese Analyse für die 2. Spalte des Romberg-Schemas.

(1) (iii) Berechnen Sie den Fehler der Diagonaleinträge $e(n, n; t_0)$ für jedes t_0 und interpretieren Sie diesen.

(2) (b) Approximieren Sie die maximale Geschwindigkeit aus der ein Auto der Masse 2055kg mit defekten Bremsen bis zum Stillstand abgebremst werden kann. Die zeitabhängige Bremskraft $k(t)$ Newton sei dabei gegeben durch

$$k(t) = 17125 \exp\left(-\frac{\pi}{4}t^2\right).$$

Plotten Sie dazu die Funktion $g(T) = \int_0^T \exp\left(-\frac{\pi}{4}t^2\right)\, dt$. Die numerische Integration soll mit einer geeigneten Trapez- oder Simpsonsumme erfolgen.
Hinweis: Bereits in Aufgabenteil (a) programmierte Routinen dürfen verwendet werden.

(6 Punkte)

Aufgabe 20: (Lineare Gleichungssysteme, LR-Zerlegung, Pivotisierung)
Lösen Sie *von Hand* das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 1.1 & 3.1 \\ 2 & 5.6 & 3.1 \\ 4 & 0.15 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 0.1 \\ 4.45 \end{bmatrix}$$

durch LR-Zerlegung unter Angabe aller Zwischenschritte, einmal mit absoluter
(2)+(2) Spaltenpivotisierung und einmal ohne Pivotisierung. Verwenden Sie nur dezimale Gleitkommazahlen bzw. -operationen mit der Mantissenlänge 3 und die zugehörige
(2) Rundungsvorschrift in jedem Schritt. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung.

(6 Punkte)

AUFGABE 18: (Numerische Integration, Newton-Cotes-Formeln)

$$Q_m(g) := \frac{b-a}{m} \cdot \sum_{j=0}^{m} \sigma_j^m \cdot g(t_j) \qquad \text{(Newton-Cotes-Formel)} \tag{18.1}$$

wobei

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a<b$

$t_j := a + j \cdot h$ äquidistante Stützstellen, $j = 0, \dots, m$, $h := \frac{b-a}{m}$

!

$$\sigma_i^m := \int_0^m \prod_{\substack{j \neq i \\ j=0}}^{m} \frac{s-i}{i-j} \, ds$$

zu (a): Betrachte

$$\int_a^b \underbrace{\left(\int_c^d f(s,t) \, ds \right)}_{=: g(t)} dt$$

Wegen (18.1) gilt

$$\int_c^d f(s,\underset{\uparrow \, t \text{ fest}}{t}) \, ds = g(t) \approx Q_m(f(\cdot,t)) = \frac{d-c}{m} \cdot \sum_{j=0}^{m} \sigma_j^m \cdot f(s_j, t), \tag{18.2}$$

$s_j := c + j \cdot h_1 \quad (j = 0, \dots, m)$, $h_1 := \frac{d-c}{m}$

und

$$\int_a^b g(t) \, dt \approx Q_m(g) = \frac{b-a}{m} \cdot \sum_{j=0}^{m} \sigma_j^m \cdot g(t_j), \tag{18.3}$$

$t_j := a + j \cdot h_2 \quad (j = 0, \dots, m)$, $h_2 := \frac{b-a}{m}$

Daraus resultiert die Quadraturformel für das Doppelintegral (Kubaturformel)

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left(\int_c^d f(s,t) \, ds \right) dt \approx Q_{m,m}(f) &= \frac{b-a}{m} \cdot \sum_{j=0}^{m} \sigma_j^m \cdot Q_m(f(\cdot, t_j)) \\
&= \frac{b-a}{m} \cdot \sum_{j=0}^{m} \sigma_j^m \cdot \left(\frac{d-c}{m} \cdot \sum_{k=0}^{m} \sigma_k^m \cdot f(s_k, t_j) \right) \\
&= \frac{(b-a) \cdot (d-c)}{m^2} \cdot \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} \sigma_j^m \sigma_k^m \cdot f(s_k, t_j)
\end{aligned} \tag{18.4}$$

zu (b): Betrachte

$$p(s,t) = \sum_{i=0}^{K} \sum_{j=0}^{L} \alpha_{ij} \cdot t^i s^j$$

Es gilt:

inneres Integral

① : (zu (18.2)) $\forall t$: Q_m integriert $p(\cdot, t)$ exakt

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} p(\cdot,t) \in \mathcal{P}_m, & m \text{ ungerade} \\ p(\cdot,t) \in \mathcal{P}_{m+1}, & m \text{ gerade} \quad \text{(Vgl. Aufgabe 15 (b))} \end{cases}$$

äußeres Integral

② : (zu (18.3)) Q_m integriert $\int_c^d p(s,\cdot) \, ds$ exakt

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \int_c^d p(s,\cdot) \, ds \in \mathcal{P}_m, & m \text{ ungerade} \\ \int_c^d p(s,\cdot) \, ds \in \mathcal{P}_{m+1}, & m \text{ gerade} \end{cases}$$

Daraus folgt für (18.4): $Q_{m,m}$ integriert $p(\cdot,\cdot)$ exakt

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} p \in \mathcal{P}^2_{m,m} := \left\{ f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \mid f(s,t) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} \alpha_{ij}\, s^i t^j \,,\ \alpha_{ij} \in \mathbb{R} \right\}, & m \text{ ungerade} \\ p \in \mathcal{P}^2_{m+1,m+1} := \left\{ f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \mid f(s,t) = \sum_{i=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{m+1} \alpha_{ij}\, s^i t^j ,\ \alpha_{ij} \in \mathbb{R} \right\}, & m \text{ gerade} \end{cases}$$

<u>zu (c):</u> Betrachte

$$\int_0^1 \int_{-1}^5 \underbrace{4t + 2s^3 + 3t^2 s^2}_{=f(s,t)} \, ds\, dt \quad = 366$$

<u>$m=1$:</u> Wegen

$$t_0 = a = 0 \qquad\qquad f(-1,0) = -2$$
$$t_1 = b = 1 \qquad\qquad f(5,0) = 2\cdot 5^3 = 250$$
$$s_0 = c = -1 \qquad\qquad f(-1,1) = 5$$
$$s_1 = d = 5 \qquad\qquad f(5,1) = 329$$

$$\sigma_0^1 = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{1} \frac{s-j}{0-j}\, ds = \int_0^1 1 - s\, ds = \left[s - \frac{1}{2}s^2 \right]_0^1 = \left(1-\frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_1^1 = \frac{1}{2} \quad \text{(analog)}$$

erhalten wir

$$Q_{1,1}(f) = \frac{(b-a)(d-c)}{1^2}\cdot\left[\sigma_0^1\sigma_0^1 \cdot f(s_0,t_0) + \sigma_0^1\sigma_1^1\cdot f(s_1,t_0) + \sigma_1^1\sigma_0^1\cdot f(s_0,t_1) + \sigma_1^1\sigma_1^1\cdot f(s_1,t_1)\right]$$
$$= \frac{(1-0)\cdot(5-(-1))}{1^2}\cdot\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot f(-1,0) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot f(5,0) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot f(-1,1) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot f(5,1)\right]$$
$$= 6\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot\left[-2+250+5+329\right]$$
$$= 6\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot 582$$
$$= \underline{873} \qquad \left(\overset{!}{\neq} 366\right)$$

Die Quadraturformel $Q_{1,1}$ integriert Polynome aus $\mathcal{P}^2_{1,1}$ exakt. Da $f \in \mathcal{P}^2_{3,2}$ und $f \notin \mathcal{P}^2_{3,2} \cap \mathcal{P}^2_{1,1} = \mathcal{P}_{1,1}$, kann $Q_{1,1}$ die Funktion f nicht exakt integrieren.

<u>$m=2$:</u> Wegen

$$t_0 = a = 0 \qquad f(-1,0) = -2 \qquad f(-1,1) = 5$$
$$t_1 = a + \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2} \qquad f(2,0) = 16 \qquad f(2,1) = 32$$
$$t_2 = b = 1 \qquad f(5,0) = 250 \qquad f(5,1) = 329$$
$$s_0 = c = -1 \qquad f\left(-1,\tfrac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$
$$s_1 = c + \frac{d-c}{2} = 2 \qquad f\left(2,\tfrac{1}{2}\right) = 21$$
$$s_2 = d = 5 \qquad f\left(5,\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1083}{4}$$

$$\sigma_0^2 = \int_0^2 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{2} \frac{s-j}{0-j}\, ds = \int_0^2 \frac{(s-1)(s-2)}{(-1)\cdot(-2)}\, ds = \frac{1}{3}$$

$$\sigma_1^2 = \int_0^2 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{2} \frac{s-j}{1-j}\, ds = \int_0^2 \frac{s\cdot(s-2)}{1\cdot(-1)}\, ds = \frac{4}{3}$$

$$\sigma_2^2 = \int_0^2 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 2}}^{m} \frac{s-j}{2-j}\, ds = \int_0^2 \frac{s\cdot(s-1)}{2\cdot 1}\, ds = \frac{1}{3}$$

erhalten wir

$$Q_{2,2}(f) = \frac{(b-a)\cdot(d-c)}{2^2} \cdot \Big[\sigma_0^2 \sigma_0^2 \cdot f(s_0,t_0) + \sigma_0^2 \sigma_1^2 \cdot f(s_1,t_0) + \sigma_0^2 \sigma_2^2 \cdot f(s_2,t_0)$$
$$+ \sigma_1^2 \sigma_0^2 \cdot f(s_0,t_1) + \sigma_1^2 \sigma_1^2 \cdot f(s_1,t_1) + \sigma_1^2 \sigma_2^2 \cdot f(s_2,t_1)$$
$$+ \sigma_2^2 \sigma_0^2 \cdot f(s_0,t_2) + \sigma_2^2 \sigma_1^2 \cdot f(s_1,t_2) + \sigma_2^2 \sigma_2^2 \cdot f(s_2,t_2) \Big]$$

$$= \frac{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \Big[-2 + 4\cdot 16 + 250 + 4 \cdot \frac{3}{4} + 4^2 \cdot 21 + 4 \cdot \frac{1083}{4}$$
$$+ 5 + 4 \cdot 32 + 329 \Big]$$

$$= \frac{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 2196 = 366$$

Die Quadraturformel $Q_{2,2}$ integriert Polynome aus $\mathcal{P}_{3,3}^2$ exakt (da $m=2$ gerade).
Da $f \in \mathcal{P}_{3,2}^2$, folgt, dass $Q_{2,2}$ die Funktion f exakt integriert.

```
function aufgabe19
    % ---------------------------
    % |   AUFGABENTEIL (a)   |
    % ---------------------------
    % 1. Initialisierung:
    Ts = [1.2 1.005 1]';      % Ts        : linke Intervallgrenzen
    k = 9;                    % k         : Tiefe des Romberg-Schemas
    fehler0 = zeros(3,k+1);   % fehler0   : Fehler der ersten Romberg-Spalte
    fehler1 = zeros(3,k+1);   % fehler1   : Fehler der zweiten Romberg-Spalte
    fehlerd = zeros(3,k+1);   % fehlerd   : Fehler der Diagonaleintraege des
                              %             Romberg-Schemas

    % 2. Berechnung:
    for i=1:3
        T = romberg(Ts(i),3,k+1, @(t) f(t));
        % ------------------------------------------------------
        % | zu (i): (Fehler der zweiten Romberg-Spalte) |
        % ------------------------------------------------------
        fehler0(i,:) = abs(F(3) - F(Ts(i)) - T(1:(k+1),1));
        % ------------------------------------------------------
        % | zu (ii): (Fehler der zweiten Romberg-Spalte) |
        % ------------------------------------------------------
        fehler1(i,2:(k+1)) = abs(F(3) - F(Ts(i)) - T(2:(k+1),2));
        % ----------------------------------------------------------------------
        % | zu (iii): (Fehler der Diagonaleintraege des Romberg-Schemas) |
        % ----------------------------------------------------------------------
        fehlerd(i,:) = abs(F(3) - F(Ts(i)) - diag(T));
    end

    % 3. Ausgabe: (Bildschirmausgabe, siehe: command Windows)
    fprintf('\nFehler der Romberg-Schritte: 1.Spalte (Trapezsummen)\n');
    fprintf('------------------------------------------------------------\n');
    fprintf('t0          = %5.4f        %5.4f        %5.4f\n', Ts);
    fprintf('----------------------------------------------------------\n');
    fprintf('e(%1.0f,0;t0) = %5.10f %5.10f %5.10f\n', [(0:k); fehler0]);

    fprintf('\nFehlerverhältnis\n');
    fprintf('------------------\n');
    fprintf('t0     = %5.4f    %5.4f    %5.4f\n', Ts);
    fprintf('------------------------------------\n');
    fprintf('e%1.0f/e%1.0f = %5.4f    %5.4f    %5.4f\n', [(0:k-1); (1:k); fehler0↙
(:,1:end-1)./fehler0(:,2:end)]);
    fprintf('\n');

    fprintf('\nFehler der Romberg-Schritte: 2.Spalte (Simpsonsummen)\n');
    fprintf('------------------------------------------------------------\n');
    fprintf('t0          = %5.4f             %5.4f             %5.4f\n', Ts);
    fprintf('-----------------------------------------------------------------\n');
    fprintf('e(%1.0f,1;t0) = %5.12f %5.12f %5.12f\n', [(1:k); fehler1(:,2:↙
end)]);

    fprintf('\nFehlerverhältnis\n');
    fprintf('------------------\n');
    fprintf('t0     = %5.4f    %5.4f    %5.4f\n', Ts);
    fprintf('------------------------------------\n');
```

```
    fprintf('e%1.0f/e%1.0f = %7.4f  %7.4f  %7.4f\n', [(1:k-1); (2:k); fehler1↙
(:,2:end-1)./fehler1(:,3:end)]);

    fprintf('\nFehler der Romberg-Schritte: Diagonale\n');
    fprintf('---------------------------------------\n');
    fprintf('t0          = %5.4f             %5.4f             %5.4f\n', Ts);
    fprintf('------------------------------------------------------------------------↙
\n');
    fprintf('e(%1.0f,%1.0f;t0) = %5.15f %5.15f %5.15f\n', [(0:k); (0:k);↙
fehlerd]);

    % --------------------
    % |  AUFGABENTEIL (b)  |
    % --------------------
    % 1. Initialisierung:                            rechte
    Ts=0:.1:5;                        % Ts     : linke Intervallgrenzen
    k=9;                              % k      : Tiefe des Romberg-Schemas
    gTrap=zeros(length(Ts),1);        % gTrap  : Trapezsumme
    gSimp=zeros(length(Ts),1);        % gSimp  : Simpsonsumme

    % 2. Berechnung:
    for i=1:length(Ts)
        T = romberg(0,Ts(i),k+1, @(t) g(t));
        % zu Trapezsumme:
        gTrap(i) = T(k+1,1);
        % zu Simpsonsumme:
        gSimp(i) = T(k+1,2);
    end

    % 3. Ausgabe:
    figure
    subplot(2,1,1);
    plot(Ts,gTrap,'b');
    title('Approximation der Integralfunktion g(t) via Romberg-Verfahren');
    xlabel('t');
    ylabel('g(t)');
    axis([0 5 0 1.2]);
    legend('T_{9,0} : Trapezsumme',...
           'Location','East');
    subplot(2,1,2);
    plot(Ts,gSimp,'r');
    xlabel('t');
    ylabel('g(t)');
    axis([0 5 0 1.2]);
    legend('T_{9,1} : Simpsonsumme',...
           'Location','East');

end

function T = romberg(a,b,k,f)
%ROMBERG Romberg-Verfahren
%    a   : linke Intervallgrenze
%    b   : rechte Intervallgrenze
%    k   : Tiefe des Romberg-Verfahrens
%    f   : Funktion f (Funktionshandle)
```

```
%   T  : ausgewertetes Romberg-Schema (Romberg-Tableau)

    % ---------------
    % | Vorbereitung |
    % ---------------
    T = zeros(k,k);
    h = (b-a)./2.^(0:k-1)';
    M = zeros(1,k-1);
    % ---------------
    % |  1. Schritt  |
    % ---------------
    T(1,1) = h(2)*(f(a)+f(b));
    % ---------------
    % |  2. Schritt  |
    % ---------------
    for n=1:k-1
        M(n) = h(n) * sum(f(a + (2.*(0:2^(n-1)-1)+1).*h(n+1)));
    end
    % ---------------
    % |  3. Schritt  |
    % ---------------
    for n=2:k
        T(n,1) = 1/2*(T(n-1,1) + M(n-1));
    end
    % ---------------
    % |  4. Schritt  |
    % ---------------
    for j=2:k
        for n=j:k
            T(n,j) = (4^(j-1)*T(n,j-1) - T(n-1,j-1))/(4^(j-1)-1);
        end
    end
end

function y = f(t)
    y = (t-1).^(1/5);
end

function y = F(t)
    y = 5/6*(t-1).^(6/5);
end

function y = g(t)
    y = exp((-pi*t.^2)./4);
end
```

Fehler der Romberg-Schritte: 1.Spalte (Trapezsummen)

t0	= 1.2000	1.0050	1.0000
e(0,0;t0)	= 0.1075704309	0.4215206069	0.7657989033
e(1,0;t0)	= 0.0333151505	0.1692886548	0.3401480808
e(2,0;t0)	= 0.0094319646	0.0653640891	0.1498115023
e(3,0;t0)	= 0.0024984175	0.0241709879	0.0656513149
e(4,0;t0)	= 0.0006378589	0.0084965572	0.0286871579
e(5,0;t0)	= 0.0001604608	0.0028107242	0.0125145171
e(6,0;t0)	= 0.0000401815	0.0008666436	0.0054541876
e(7,0;t0)	= 0.0000100496	0.0002482239	0.0023758050
e(8,0;t0)	= 0.0000025127	0.0000666759	0.0010345622
e(9,0;t0)	= 0.0000006282	0.0000171678	0.0004504276
	6	4	3

etwa „$\cdot\frac{1}{4}$"

Fehlerverhältnis

t0	= 1.2000	1.0050	1.0000
e0/e1	= 3.2289	2.4900	2.2514
e1/e2	= 3.5322	2.5899	2.2705
e2/e3	= 3.7752	2.7042	2.2819
e3/e4	= 3.9169	2.8448	2.2885
e4/e5	= 3.9752	3.0229	2.2923
e5/[illegible]	= 3.9934	3.2432	2.2945
e6/[illegible]	= 3.9983	3.4914	2.2957
e7/e8	= 3.9996	3.7228	2.2964
e8/e9	= 3.9999	3.8838	2.2968

Konvergiert gegen 4

Fehler der Romberg-Schritte: 2.Spalte (Simpsonsummen)

t0	= 1.2000	1.0050	1.0000
e(1,1;t0)	= 0.008563390323	0.085211337365	0.198264473329
e(2,1;t0)	= 0.001470902647	0.030722567227	0.086365976166
e(3,1;t0)	= 0.000187235108	0.010439954219	0.037597919042
e(4,1;t0)	= 0.000017672645	0.003271746984	0.016365772207
e(5,1;t0)	= 0.000001328049	0.000915446533	0.007123636900
e(6,1;t0)	= 0.000000088403	0.000218616714	0.003100744363
e(7,1;t0)	= 0.000000005625	0.000042084065	0.001349677458
e(8,1;t0)	= 0.000000000353	0.000006159934	0.000587481241
e(9,1;t0)	= 0.000000000022	0.000000665151	0.000255716063
	10	6	3

etwa „$\cdot\frac{1}{16}$"

Fehlerverhältnis

t0	= 1.2000	1.0050	1.0000
e1/e2	= 5.8219	2.7736	2.2956
e2/e3	= 7.8559	2.9428	2.2971
e3/e4	= 10.5946	3.1909	2.2974
e4/e5	= 13.3072	3.5739	2.2974
e5/e6	= 15.0226	4.1874	2.2974
e6/e7	= 15.7168	5.1948	2.2974
e7/e8	= 15.9260	6.8319	2.2974
e8/e9	= 15.9813	9.2610	2.2974

Konvergiert gegen 16

Fehler der Romberg-Schritte: Diagonale

t0	= 1.2000	1.0050	1.0000
e(0,0;t0)	= 0.107570430908185	0.421520606938648	0.765798903331356
e(1,1;t0)	= 0.008563390323275	0.085211337365004	0.198264473329380
e(2,2;t0)	= 0.000998070135167	0.027089982550765	0.078906076355467
e(3,3;t0)	= 0.000087428496083	0.008802030772104	0.033639423787870
e(4,4;t0)	= 0.000004532146261	0.002670009905982	0.014567918007252
e(5,5;t0)	= 0.000000118306525	0.000716425103119	0.006333012735952

zu (a)

Beobachtungen:

zu (i): 1. Fehler klingt langsamer ab, wenn die linke Integralgrenze nahe 1 liegt. (Grund: Der Integrand ist in 1 irregulär, d.h. die Steigung in 1 explodiert!)

2. Der Fehler sollte sich von Zeile zu Zeile um den Faktor $\frac{1}{4}$ reduzieren.

Fehler zwischen der 1. Spalte des Romberg-Schemas und dem exakten Integralwert. Beachte: In der 1. Spalte des Romberg-Schemas befinden sich die Trapezsummen zu sich halbierenden Schrittweiten.

(Grund: Aus der Vorlesung wissen wir

$$e(n,0) = \left|\int_a^b f(t)\,dt - T_{n0}\right| = \mathcal{O}(h_n^2)$$

$$h_{n+1} = \frac{1}{2} h_n$$

und daher

$$e(n+1,0) = \mathcal{O}(h_{n+1}^2) = \boxed{\frac{1}{4}} \cdot \mathcal{O}(h_n^2) \quad)$$

3. Das Fehlerverhältnis sollte daher (etwa) bei 4 liegen. (Grund:

$$\frac{e(n,0)}{e(n+1,0)} = \frac{\mathcal{O}(h_n^2)}{\frac{1}{4}\mathcal{O}(h_n^2)} = 4 \quad)$$

Nahe 1 nähert sich das Fehlerverhältnis nur sehr langsam dem Wert 4. (Grund: siehe 1.)

zu (ii): 1. Fehler klingt langsamer ab, wenn die linke Integralgrenze nahe 1 liegt. (Grund: Der Integrand ist in 1 irregulär, d.h. die Steigung in 1 explodiert!)

Fehler zwischen der 2. Spalte des Romberg-Schemas und dem exakten Integralwert. Beachte: In der 2. Spalte des Romberg-Schemas befinden sich die Simpson-Summen zu sich halbierenden Schrittweiten.

2. Der Fehler sollte sich von Zeile zu Zeile um den Faktor $\frac{1}{16}$ reduzieren. (Grund: Aus der Vorlesung wissen wi[r]

$$e(n,1) = \left|\int_a^b f(t)\,dt - T_{n1}\right| = \mathcal{O}(h_n^4)$$

$$h_{n+1} = \frac{1}{2} h_n$$

und daher

$$e(n+1,0) = \mathcal{O}(h_{n+1}^4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \mathcal{O}(h_n^4) = \frac{1}{16}\mathcal{O}(h_n^4)$$

3. Das Fehlerverhältnis sollte daher (etwa) bei 16 liegen. (Grund:

$$\frac{e(n,1)}{e(n+1,1)} = \frac{\mathcal{O}(h_n^4)}{\frac{1}{16}\cdot\mathcal{O}(h_n^4)} = 16 \quad)$$

Nahe 1 nähert sich das Fehlerverhältnis nur sehr langsam dem Wert 16. (Grund: siehe 1.)

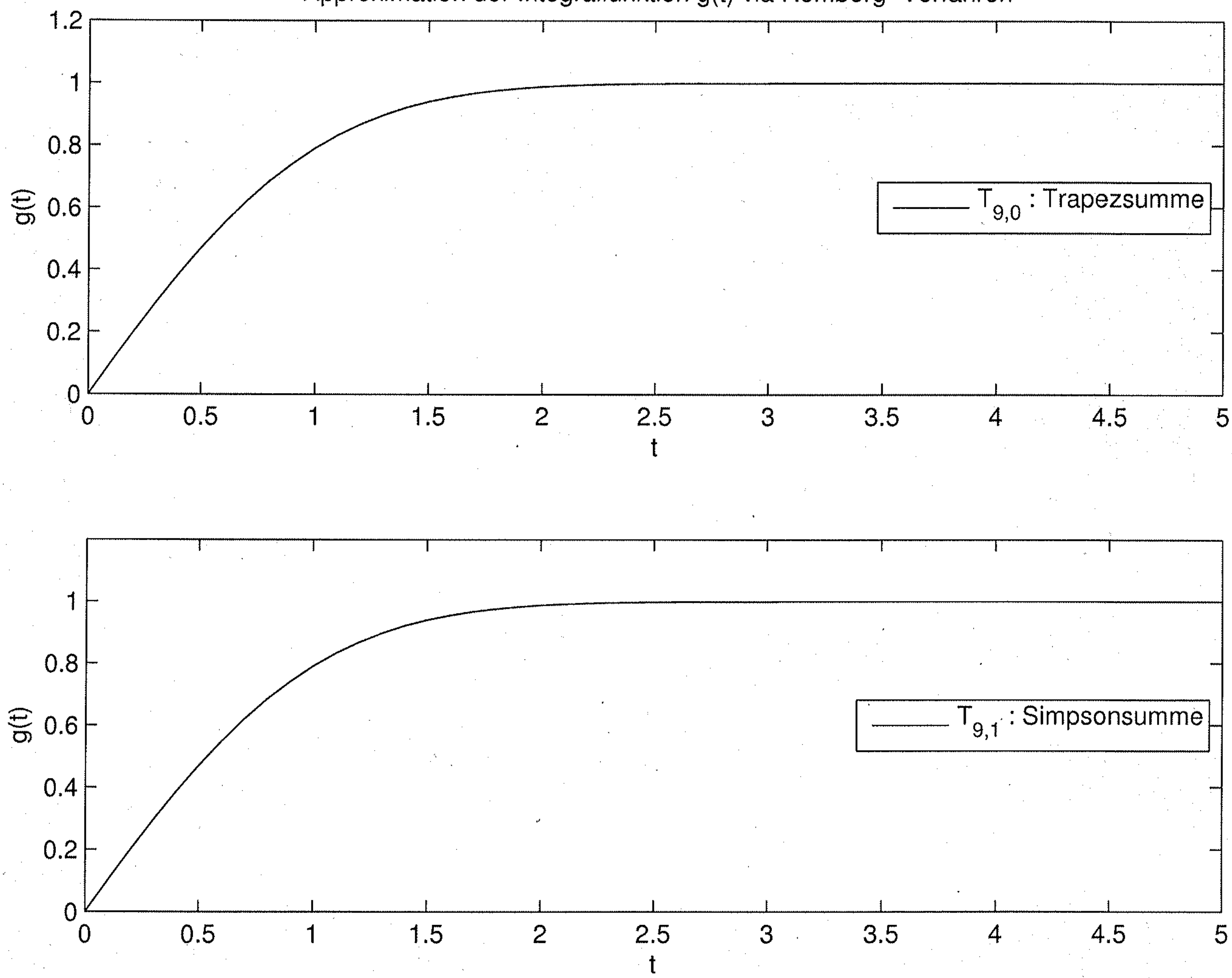
zu (iii): 1. Entlang der Diagonalen nimmt der Fehler stark ab. Nahe der 1 jedoch langsamer. (Grund: siehe 1.)

```
e(6,6;t0) = 0.000000001375289 0.000159967052837 0.002755730542442
e(7,7;t0) = 0.000000000006483 0.000027364476818 0.001199406397520
e(8,8;t0) = 0.000000000000011 0.000003215127491 0.000522061622030
```

$$e(9,9;t0) = 0.\underbrace{000000000000000}_{15}\ 0.\underbrace{000000}_{6}227739660\ 0.\underbrace{000}_{3}227239394910$$

zu (b)

Approximation der Integralfunktion g(t) via Romberg-Verfahren



Fortsetzung: zu (b)

Die Abbildungen zeigen, dass der Limes von g etwa 1 ist, d.h.

$$\lim_{T\to\infty} g(T) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \exp(-\tfrac{\pi}{4}t^2)\,dt = 1$$

Kommen wir nun zur Fragestellung: Das Newtonsche Gesetz der Beschleunigung besagt

$$\vec{a}(t) := v'(t) = -\frac{K(t)}{m} = -\underbrace{\frac{17125}{2055}}_{=\frac{25}{3}} \cdot \exp(-\tfrac{\pi}{4}t^2)$$

Die Stammfunktion der Beschleunigung v' ist die Geschwindigkeit v (v_0 = Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t=0$)

$$v(t) = v_0 + \int_0^t v'(s)\,ds \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Zeile}\\ \text{zuvor}}}{=} v_0 - \frac{25}{3} \cdot \underbrace{\int_0^t \exp(-\tfrac{\pi}{4}s^2)\,ds}_{=g(t)}$$

Originalgewicht vom 7er BMW F01

Um die maximale Geschwindigkeit zu bestimmen, die das 2055 Kg schwere Auto (BMW F01 (7er)) fahren darf, so dass es trotz defekter Bremsen (in endlicher Zeit) bis zum Stillstand abgebremst werden kann, muss $v(t) = 0$ gelten, d.h.

$$0 \overset{!}{=} v(t) = v_0 - \frac{25}{3} \cdot g(t)$$

Das Abbremsen (in endlicher Zeit) funktioniert daher nur dann, wenn

$$v_0 < \frac{25}{3} \cdot \underbrace{\lim_{t\to\infty} g(t)}_{=1 \text{ (wie wir numerisch beobachtet haben)}} = \frac{25}{3}\ \text{m/s} = 30\ \text{Km/h}$$

Der 7er BMW darf demnach nur für „Tempo 30-Zonen" vom TÜV zugelassen werden. (Ob wir in der Realität tatsächlich ein Auto mit defekten Bremsen beim TÜV zugelassen bekommen, sei erst einmal dahingestellt.)

AUFGABE 20: (Lineare Gleichungssysteme, LR-Zerlegung, Pivotisierung)

Betrachte das LGS

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 1.1 & 3.1 \\ 2 & 5.6 & 3.1 \\ 4 & 0.15 & 0.25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.5 \\ 0.1 \\ 4.45 \end{pmatrix} \qquad (Ay = b)$$

1. Exakte Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.4 & 1.1 & 3.1 & 7.5 \\ 2 & 5.6 & 3.1 & 0.1 \\ 4 & 0.15 & 0.25 & 4.45 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III}-\left(\frac{4}{0.4}\right)\cdot \mathrm{I}]{\mathrm{II}-\left(\frac{2}{0.4}\right)\cdot \mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0.4 & 1.1 & 3.1 & 7.5 \\ 0 & 0.1 & -12.4 & -37.4 \\ 0 & -10.85 & -30.75 & -70.55 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III}+\left(\frac{10.85}{0.1}\right)\cdot \mathrm{II}]{\mathrm{I}-\left(\frac{1.1}{0.1}\right)\cdot \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0.4 & 0 & 139.5 & 418.9 \\ 0 & 0.1 & -12.4 & -37.4 \\ 0 & 0 & -1376.15 & -4128.45 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{II}-\left(\frac{12.4}{1376.15}\right)\mathrm{III}]{\mathrm{I}+\left(\frac{139.5}{1376.15}\right)\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0.4 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & -1376.15 & -4128.45 \end{array}\right)$$

$\mathrm{I} : 0.4$
$\mathrm{II} : 0.1$
$\mathrm{III} : (-1376.15)$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Mit absoluter Spalten-Pivotisierung: (Mantissenlänge 3)

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 1.1 & 3.1 \\ 2 & 5.6 & 3.1 \\ 4 & 0.15 & 0.25 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Vertausche I und III}]{} \begin{pmatrix} 4 & 0.15 & 0.25 \\ 2 & 5.6 & 3.1 \\ 0.4 & 1.1 & 3.1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}-\left(\frac{0.4}{4}\right)\cdot \mathrm{I}]{\mathrm{II}-\left(\frac{2}{4}\right)\cdot \mathrm{I}} \begin{pmatrix} 4 & 0.15 & 0.25 \\ \boxed{0.5} & 5.53 & 2.98 \\ \boxed{0.1} & 1.09 & 3.08 \end{pmatrix}$$

Pivotelement

q_{ik}

Pivotelement bereits an der richtigen Stelle → Kein Tausch

$$\xrightarrow[\mathrm{III}-\left(\frac{1.09}{5.53}\right)\mathrm{II}]{} \begin{pmatrix} 4 & 0.15 & 0.25 \\ \boxed{0.5} & 5.53 & 2.98 \\ \boxed{0.1} & \boxed{0.197} & 2.49 \end{pmatrix}$$

q_{ik}

$Lu = Pb$: (Vorwärtsauflösen)

$$b = \begin{pmatrix} 7.5 \\ 0.1 \\ 4.45 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{obige Vertauschungen}} Pb = \begin{pmatrix} 4.45 \\ 0.1 \\ 7.5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II}-0.5\cdot\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 4.45 \\ -2.13 \\ 7.5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}-0.1\cdot\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 4.45 \\ -2.13 \\ 7.06 \end{pmatrix} \ldots$$

$$\ldots \xrightarrow{\mathrm{III}-0.197\cdot\mathrm{II}} u = \begin{pmatrix} 4.45 \\ -2.13 \\ 7.48 \end{pmatrix}$$

$Ry = u$: (Rückwärtsauflösen)

$$u \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4.45 \\ -2.13 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4.45 \\ -11.1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4.45 \\ -2.01 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -2.01 \\ 3 \end{pmatrix} \ldots$$

$$\ldots \rightsquigarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2.01 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Ohne Pivotisierung : (Mantissenlänge 3)

$\neq 0$, daher keine Vertauschung

$\neq 0$, daher auch hier keine Vertauschung

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 1.1 & 3.1 \\ 2 & 5.6 & 3.1 \\ 4 & 0.15 & 0.25 \end{pmatrix} \underset{\substack{II - \left(\frac{2}{0.4}\right)\cdot I \\ III - \left(\frac{4}{0.4}\right)\cdot I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0.4 & 1.1 & 3.1 \\ \boxed{5} & 0.1 & -12.4 \\ \boxed{10} & -10.9 & -30.8 \end{pmatrix} \underset{III + \left(\frac{10.9}{0.1}\right) II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0.4 & 1.1 & 3.1 \\ \boxed{5} & 0.1 & -12.4 \\ \boxed{10} & \boxed{-109} & -1380 \end{pmatrix}$$

q_{ik} $\qquad$ q_{ik}

$Lu = Pb$: (Vorwärtseinsetzen)

$$b = \begin{pmatrix} 7.5 \\ 0.1 \\ 4.45 \end{pmatrix} \rightsquigarrow Pb = \begin{pmatrix} 7.5 \\ 0.1 \\ 4.45 \end{pmatrix} \overset{II - 5\cdot I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 7.5 \\ -37.4 \\ 4.45 \end{pmatrix} \overset{III - 10\cdot I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 7.5 \\ -37.4 \\ -70.6 \end{pmatrix} \ldots$$

keine Vertauschungen durchgeführt

$$\ldots \overset{III + 109\cdot II}{\rightsquigarrow} u = \begin{pmatrix} 7.5 \\ -37.4 \\ -4150 \end{pmatrix}$$

60

$Ry = u$: (Rückwärtseinsetzen)

$$u \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 7.5 \\ -37.4 \\ 3.01 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 7.5 \\ -0.1 \\ 3.01 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 7.5 \\ -1 \\ 3.01 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -0.73 \\ -1 \\ 3.01 \end{pmatrix} \ldots$$

$$\ldots \rightsquigarrow y = \begin{pmatrix} -1.83 \\ -1 \\ 3.01 \end{pmatrix}$$