Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 8
01.06.2010

Abgabe: Donnerstag, 10.06.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 21: (Programmieraufgabe, LR-Zerlegung)

(4) (a) Implementieren Sie den Algorithmus der LR-Zerlegung zum Lösen linearer Gleichungssysteme der Form $Ay = b$. Realisieren Sie dabei die folgenden drei Strategien zur Pivotisierung:

1. ohne Pivotisierung ,
2. absolute Spaltenpivotisierung,
3. relative Spaltenpivotisierung.

Die Strategie der Pivotisierung sollte vom Benutzer beim Funktionsaufruf frei gewählt werden können und die Rückgabe der Funktion sollte lediglich die Lösung des linearen Gleichungssystems sein.

(1) (b) Testen Sie das Programm für die Daten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 10^{-20} & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 17 \\ 21 \end{pmatrix}$$

mit den drei Pivotisierungsstrategien. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit (1) der Matlab internen Routine $A\backslash b$ und begründen Sie die auftretenden Unterschiede.

(6 Punkte)

Aufgabe 22: (Programmieraufgabe, Trigonometrische Interpolation, LR-Zerlegung)

(1) (a) Entwickeln Sie ein numerisches Verfahren, das zu gegebenen Datenpaaren $(t_j, s_j)_{j=0,\ldots,m}$ für geradzahlige $m \in \mathbb{N}$ die zugehörige trigonometrische Interpolationsfunktion p bestimmt. Die Funktion p soll dabei in dem Vektorraum $\operatorname{span}\{p_0, \ldots, p_m\}$ liegen, wobei

$$\begin{aligned} p_0(t) &= 1, \\ p_{2j}(t) &= \cos\left(\frac{2\pi j t}{T}\right), \quad j = 1, \ldots, \frac{m}{2}, \\ p_{2j-1}(t) &= \sin\left(\frac{2\pi j t}{T}\right), \quad j = 1, \ldots, \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Desweiteren sollte bei der Berechnung das LR-Verfahren verwendet werden.

(2) (b) Implementieren Sie Ihr Verfahren aus Teil (a) und verwenden Sie bei der LR-Zerlegung eine absolute Spaltenpivotisierung. Berechnen Sie anschließend die trigonometrische Interpolationsfunktion zu den Daten

$$t_j = \frac{2\pi j}{m}, \quad s_j = f(t_j), \quad j = 0, \ldots, m$$

für $m = 26$ und $m = 50$ sowie für $T = 2\pi + 1$, wobei

$$f(t) = \frac{8}{5}(t - \pi)^2 \sin\left(16\,(t - \pi)\right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

(1) Plotten Sie f und p für jedes m in ein eigenes Diagramm.
Hinweis: Verwenden Sie die bereits in Aufgabe 21 erzeugte Funktion zur Berechnung der LR-Zerlegung.

(1) (c) Plotten Sie anschließend den Fehler

$$e(t) = |p(t) - f(t)|$$

auf dem Intervall $[0, 2\pi]$.

(1) Plotten Sie zudem die Interpolationsfehler

$$e_m = \max_{t \in [0, 2\pi]} |f(t) - p(t)| \quad \text{für} \quad m = 0, 2, \ldots, 80,$$

wobei die y-Achse logarithmisch zu wählen ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 21:

```
function aufgabe21

A=[1 0 2;
    1 10^(-20) 3;
    2 1 1];
b=[15;17;21];

format long;
y=LR(A,b,1)
y=LR(A,b,2)
y=LR(A,b,3)
y=A\b

end

function y=LR(A,b,pivot_type)
%LR LR-Faktorisierung, LR-Zerlegung
%   A           : quadratische Matrix des LGS's
%   b           : rechte Seite des LGS's
%   pivot_type  : Typ der Pivotisierung
%                 1 : ohne Pivotisierung
%                 2 : absolute Spaltenpivotisierung
%                 3 : relative Spaltenpivotisierung
%   y           : Loesung des LGS's

    m=length(b);        % Bestimmung der Dimension des LGS's

    y=zeros(m,1);       % Loesung
    r=zeros(1,m);       % Pivotstellen
    tau=zeros(1,m);     % Hilfsvektor

    % ----------------------
    % |  1. Schritt: PA=LR  |
    % ----------------------
    for k=1:m-1
        % A. Pivotisierung:
        % A.1. ohne Pivotisierung
        if pivot_type==1
            r(k)=k;
        % A.2. absolute Spaltenpivotisierung
        elseif pivot_type==2
            Amax=0;
            for i=k:m
                if abs(A(i,k))>Amax
                    Amax=A(i,k);      abs(A(i,k));
                    r(k)=i;
                end
            end
        % A.3. relative Spaltenpivotisierung
        elseif pivot_type==3
            Amax=0;
            for i=k:m
                si=0;
                for j=k:m
                    si=si+abs(A(i,j));
```

```
                end
                if abs(A(i,k))/si>Amax
                    Amax=abs(A(i,k))/si;
                    r(k)=i;
                end
            end
        end

        % B. Zeilentausch
        if (r(k)~=k)
            tau(1,:)=A(k,:);
            A(k,:)=A(r(k),:);
            A(r(k),:)=tau(1,:);
        end

        % C. Elementare Zeilenumformung
        for i=k+1:m
            A(i,k)=A(i,k)/A(k,k);
            for j=k+1:m
                A(i,j)=A(i,j)-A(i,k)*A(k,j);
            end
        end
    end

    % --------------------
    % |  2. Schritt: PB  |
    % --------------------
    for k=1:m-1
        if(r(k)~=k)
          tau(1,1)=b(k);
          b(k)=b(r(k));
          b(r(k))=tau(1,1);
        end
    end
    %Anmerkung: Pb=b

    % ---------------------
    % |  3. Schritt: Lu=Pb  |
    % ---------------------
    for i=2:m
        for j=1:i-1
            b(i)=b(i)-A(i,j)*b(j);
        end
    end
    %Anmerkung: u=b

    % --------------------
    % |  4. Schritt: Ry=u  |
    % --------------------
    for i=m:-1:1
        for j=i+1:m
            b(i)=b(i)-A(i,j)*b(j);
        end
        b(i)=b(i)/A(i,i);
    end
```

```
    y(:,1)=b;
end
```

AUSGABE: wg. Auslöschung

$$y=\begin{pmatrix}11\\0\\2\end{pmatrix} \leftarrow !$$ (ohne Pivotisierung)

$$y=\begin{pmatrix}11\\-3\\2\end{pmatrix}$$ (absolute Spaltenpivotisierung)

$$y=\begin{pmatrix}11\\-3\\2\end{pmatrix}$$ (relative Spaltenpivotisierung)

$$y=\begin{pmatrix}11\\-3\\2\end{pmatrix}$$ (exaktes Ergebnis)

AUFGABE 22:

zu (a): Gesucht ist eine Funktion $p \in \operatorname{span}\{p_0, \ldots, p_m\}$, d.h. p besitzt die Darstellung

$$p(t) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j p_j(t) \quad , \quad \alpha_j \in \mathbb{R} \quad , \qquad \text{(Darstellung)}$$

mit der Eigenschaft

$$p(t_i) = s_i \quad \forall i = 0, \ldots, m \qquad \text{(Interpolationsaufgabe)}$$

$$\left(\Rightarrow s_i = p(t_i) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j p_j(t_i) = \sum_{j=0}^{m/2} \alpha_{2j} \cdot \underbrace{p_{2j}(t_i)}_{\substack{= \cos\left(\frac{2\pi j}{T} \cdot t_i\right) \\ =: A_{i,2j} \\ (j=0,\ldots,m/2)}} + \sum_{j=1}^{m/2} \alpha_{2j-1} \cdot \underbrace{p_{2j-1}(t_i)}_{\substack{= \sin\left(\frac{2\pi j}{T} \cdot t_i\right) \\ =: A_{i,2j-1} \\ (j=1,\ldots,m/2)}} \right)$$

Daraus erhalten wir ein lineares Gleichungssystem der Form

$$A \cdot \alpha = s \qquad (22.1)$$

Algorithmus:

1. Löse (22.1) durch LR-Zerlegung (und erhalte α)
2. Setze $p(t) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j p_j(t)$

```
function aufgabe22

    a=0;                % a    : linke Intervallgrenze
    b=2*pi;             % b    : rechte Intervallgrenze
    T=2*pi+1;           % T    : (strikt groesser b)

    % 1. Schritt: Initialisierung des Gleichungssystems A*alpha=s
    m=50;               % m+1 : Anzahl der St�tzstellen (m gerade!!!)
    t=a:(b-a)/m:b;      % t    : Stuetzstellen
    s=f(t);             % s    : Funktionswerte
    A=zeros(m+1,m+1);   % A    : Matrix

    A(:,1)=ones(m+1,1);
    for i=0:m
        for j=1:m/2
            A(i+1,2*j+1)=cos(2*pi*j/T*t(i+1));
            A(i+1,2*j)=sin(2*pi*j/T*t(i+1));
        end
    end

    % 2. Schritt: Loesen des Gleichungssystems
    alpha=LR(A,s,2);

    % 3. Schritt: Plot der Funktionen f und p
    z=a:0.0001:b; % feine Unterteilung fuer den Plot, da fplot einen
                  % fragwuerdigen Plot erzeugt
    figure
    plot(z, f(z),'b');
    hold on 100
    plot(z, p(z,alpha,T),'r');
    hold off
    title('Interpolationspolynom zu f(t) = 1/10*t^2*sin(4t)');
    legend('f(t)', 'p(t)');
    xlabel('t');
    ylabel('f(t),p(t)');

    % ------------------------
    % | Aufgabenteil (c): |
    % ------------------------
    % Teil 1: Plot der Fehlerfunktion e(t)
    figure
    semilogy(z,abs(f(z)-p(z,alpha,T)),'b');
    %plot(z,abs(f(z)-p(z,alpha,T)),'b');
    title('Fehler |f(t)-p(t)| fuer t\in[0,2\pi] mit m=50');
    xlabel('t');
    ylabel('|f(t)-p(t)|');

    % Teil 2: Plot der Interpolationsfehler e(m)
    mmax=80;
    e=zeros(mmax/2,1);
    for m=2:2:mmax
        % 1. Schritt Initialisierung des Gleichungssystems A*alpha=s
        t=a:(b-a)/m:b;       % t    : Stuetzstellen
        s=f(t);              % s    : Funktionswerte
        A=zeros(m+1,m+1);    % A    : Matrix
```

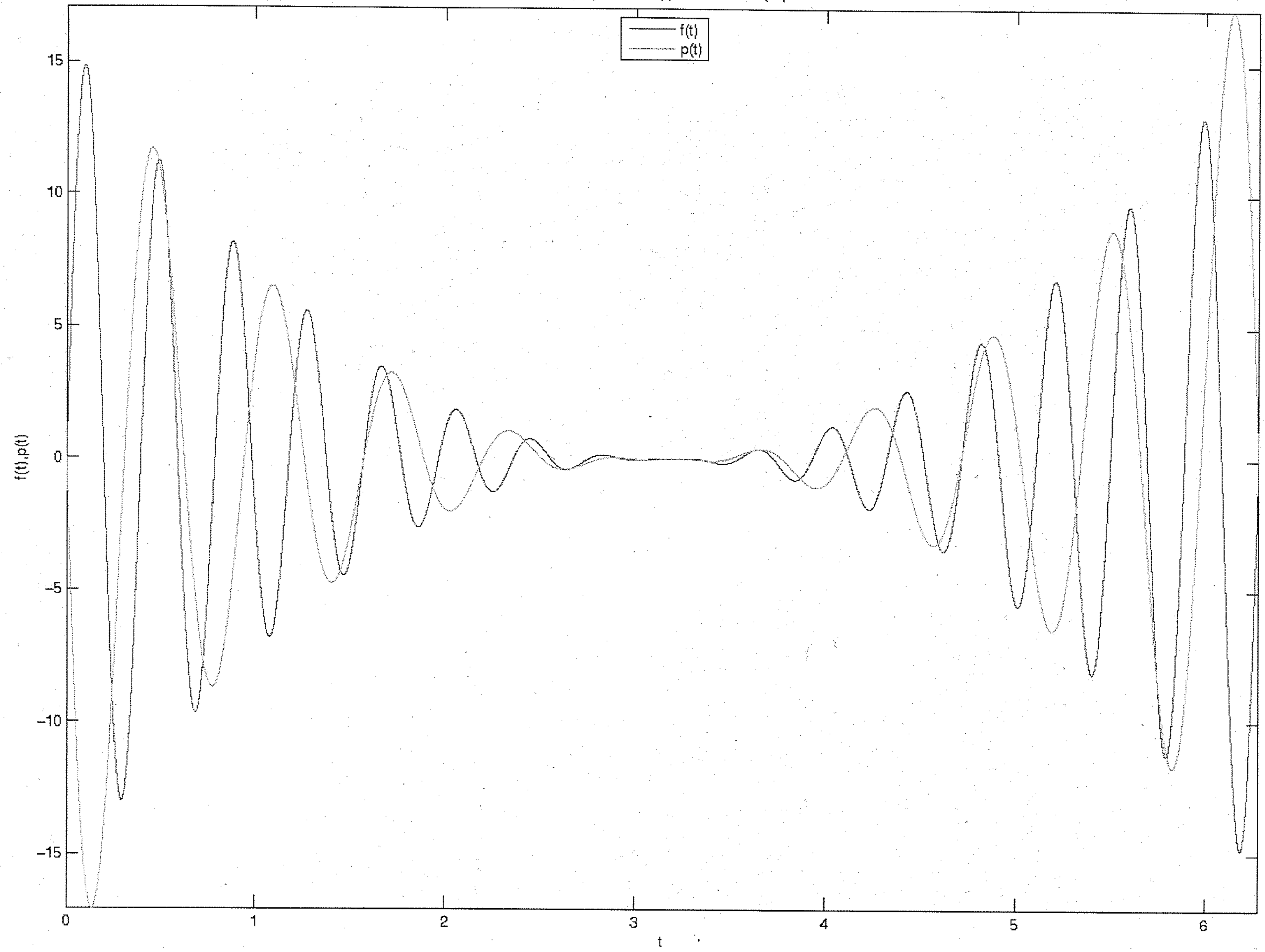
```
        A(:,1)=ones(m+1,1);
        for i=0:m
            for j=1:m/2
                A(i+1,2*j+1)=cos(2*pi*j/T*t(i+1));
                A(i+1,2*j)=sin(2*pi*j/T*t(i+1));
            end
        end
        % 2. Schritt: Loesen des Gleichungssystems
        alpha=LR(A,s,2);
        % 3. Schritt: Berechnung des Fehlers
        x=a:0.0001:b;
        e(m/2,1)=max(abs(f(x)-p(x,alpha,T)));
    end
    % 4. Schritt: Plot der Interpolationsfehler
    figure
    semilogy(2:2:mmax,e(:),'b');
    title('Interpolationsfehler max_{t\in[0,2\pi]}|f(t)-p(t)| fuer m=2,2,...,
50');
    xlabel('m');
    ylabel('Interpolationsfehler max_{t\in[0,2\pi]}|f(t)-p(t)|');
end

function y=LR(A,b,pivot_type)
%LR LR-Faktorisierung, LR-Zerlegung
%   A            : quadratische Matrix des LGS's
%   b            : rechte Seite des LGS's
%   pivot_type   : Typ der Pivotisierung
%                  1 : ohne Pivotisierung
%                  2 : absolute Spaltenpivotisierung
%                  3 : relative Spaltenpivotisierung
%   y            : Loesung des LGS's

    m=length(b);        % Bestimmung der Dimension des LGS's

    y=zeros(m,1);       % Loesung
    r=zeros(1,m);       % Pivotstellen
    tau=zeros(1,m);     % Hilfsvektor

    %  -------------------------
    % |  1. Schritt: PA=LR     |
    %  -------------------------
    for k=1:m-1
        % A. Pivotisierung:
        % A.1. ohne Pivotisierung
        if pivot_type==1
            r(k)=k;
        % A.2. absolute Spaltenpivotisierung
        elseif pivot_type==2
            Amax=0;
            for i=k:m
                if abs(A(i,k))>Amax
                    Amax=A(i,k);   abs(A(i,k))
                    r(k)=i;
                end
```

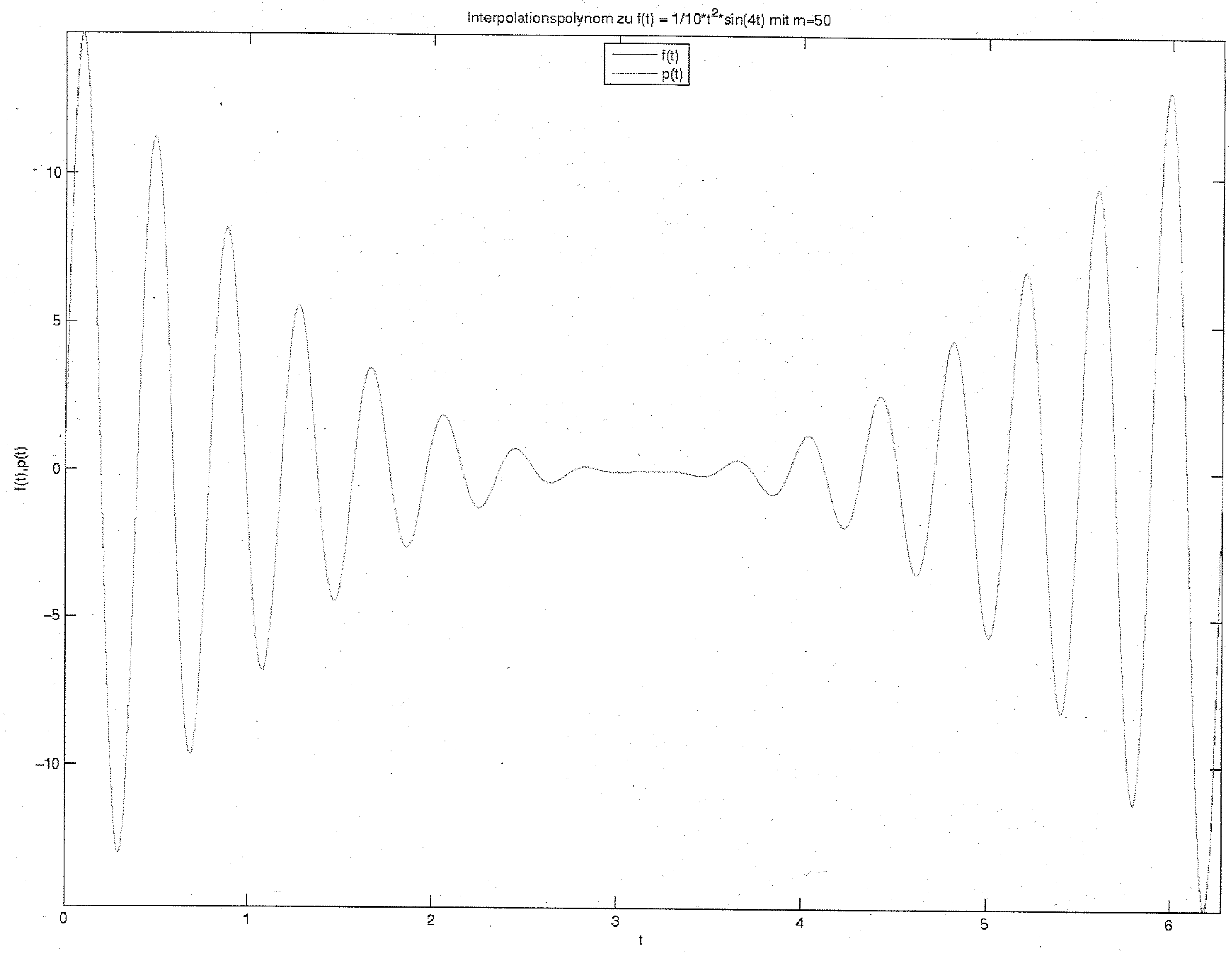
```
        end
    % A.3. relative Spaltenpivotisierung
    elseif pivot_type==3
        Amax=0;
        for i=k:m
            si=0;
            for j=k:m
                si=si+abs(A(i,j));
            end
            if abs(A(i,k))/si>Amax
                Amax=abs(A(i,k))/si;
                r(k)=i;
            end
        end
    end

    % B. Zeilentausch
    if (r(k)~=k)
        tau(1,:)=A(k,:);
        A(k,:)=A(r(k),:);
        A(r(k),:)=tau(1,:);
    end

    % C. Elementare Zeilenumformung
    for i=k+1:m
        A(i,k)=A(i,k)/A(k,k);
        for j=k+1:m
            A(i,j)=A(i,j)-A(i,k)*A(k,j);
        end
    end
end

%  -------------------
% |  2. Schritt: PB  |
%  -------------------
for k=1:m-1
    if(r(k)~=k)
       tau(1,1)=b(k);
       b(k)=b(r(k));
       b(r(k))=tau(1,1);
    end
end
%Anmerkung: Pb=b

%  ----------------------
% |  3. Schritt: Lu=Pb  |
%  ----------------------
for i=2:m
    for j=1:i-1
        b(i)=b(i)-A(i,j)*b(j);
    end
end
%Anmerkung: u=b

%  ----------------------
```

```
    % |  4. Schritt: Ry=u  |
    % ----------------------
    for i=m:-1:1
        for j=i+1:m
            b(i)=b(i)-A(i,j)*b(j);
        end
        b(i)=b(i)/A(i,i);
    end

    y(:,1)=b;
end

function s=f(t)
    s=8/5*(t-pi).^2.*sin(16*(t-pi));
end

function y=p(x,alpha,T)
    m=length(alpha)-1;
    y=alpha(1);
    for j=1:m/2
        y=y+alpha(2*j+1)*cos(2*pi*j/T*x);
        y=y+alpha(2*j)*sin(2*pi*j/T*x);
    end
end
```

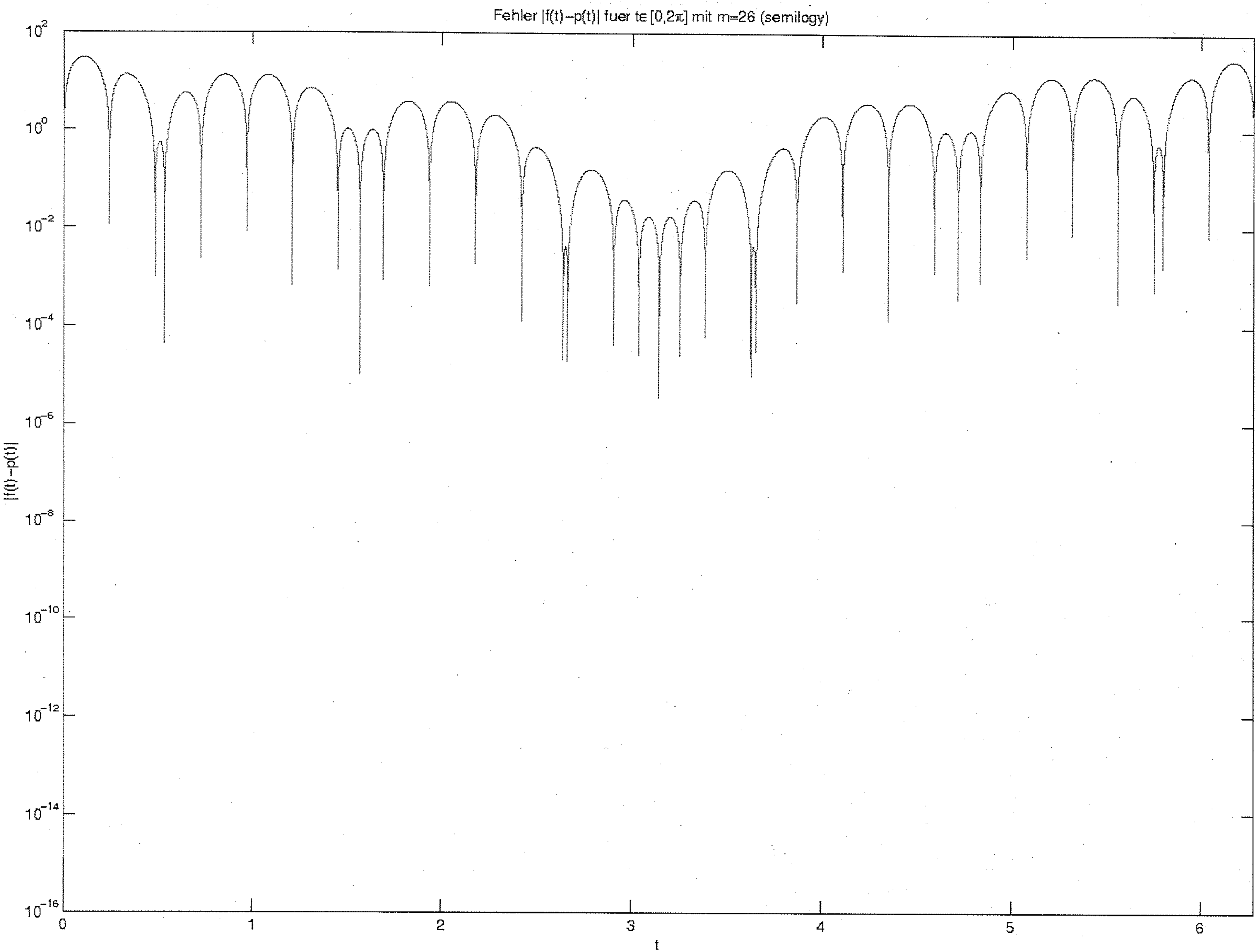
trig.

Interpolations~~polynom~~ zu $f(t) = 1/10*t^2*\sin(4t)$ mit m=26

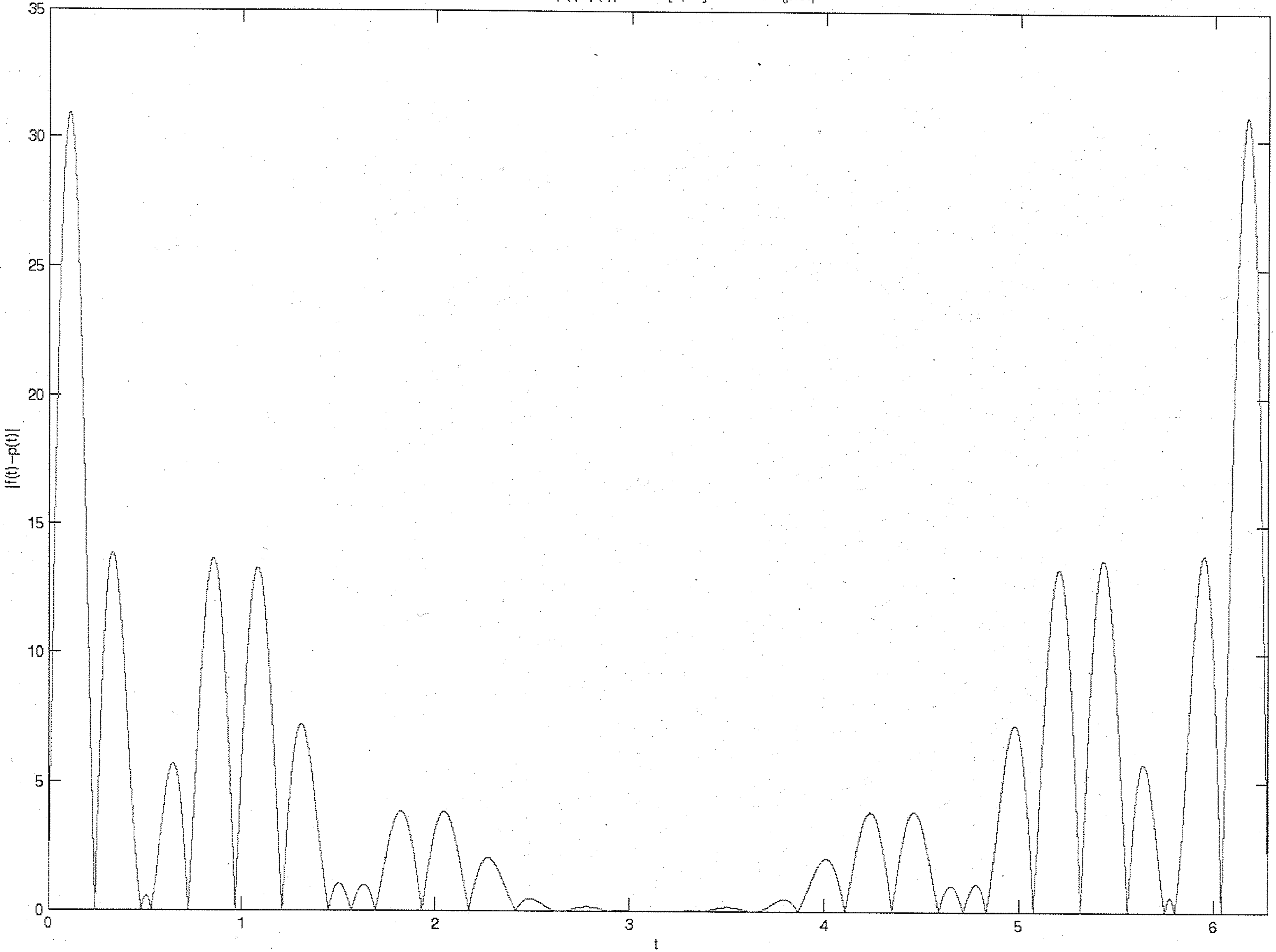




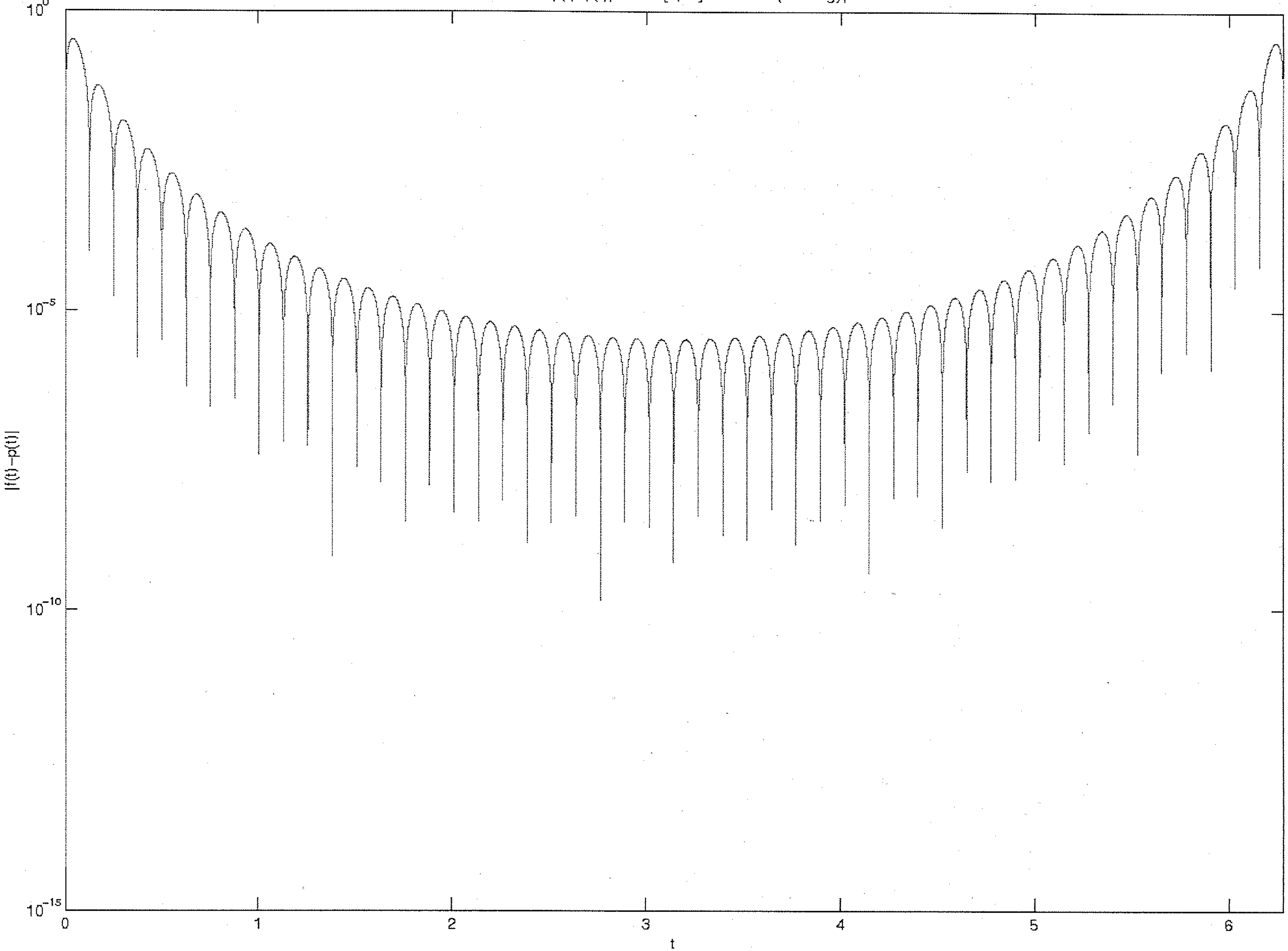
Interpolationspolynom zu f(t) = 1/10*t^2*sin(4t) mit m=50
f(t)
p(t)
10
5
0
-5
-10
f(t),p(t)
0
1
2
3
4
5
6
t

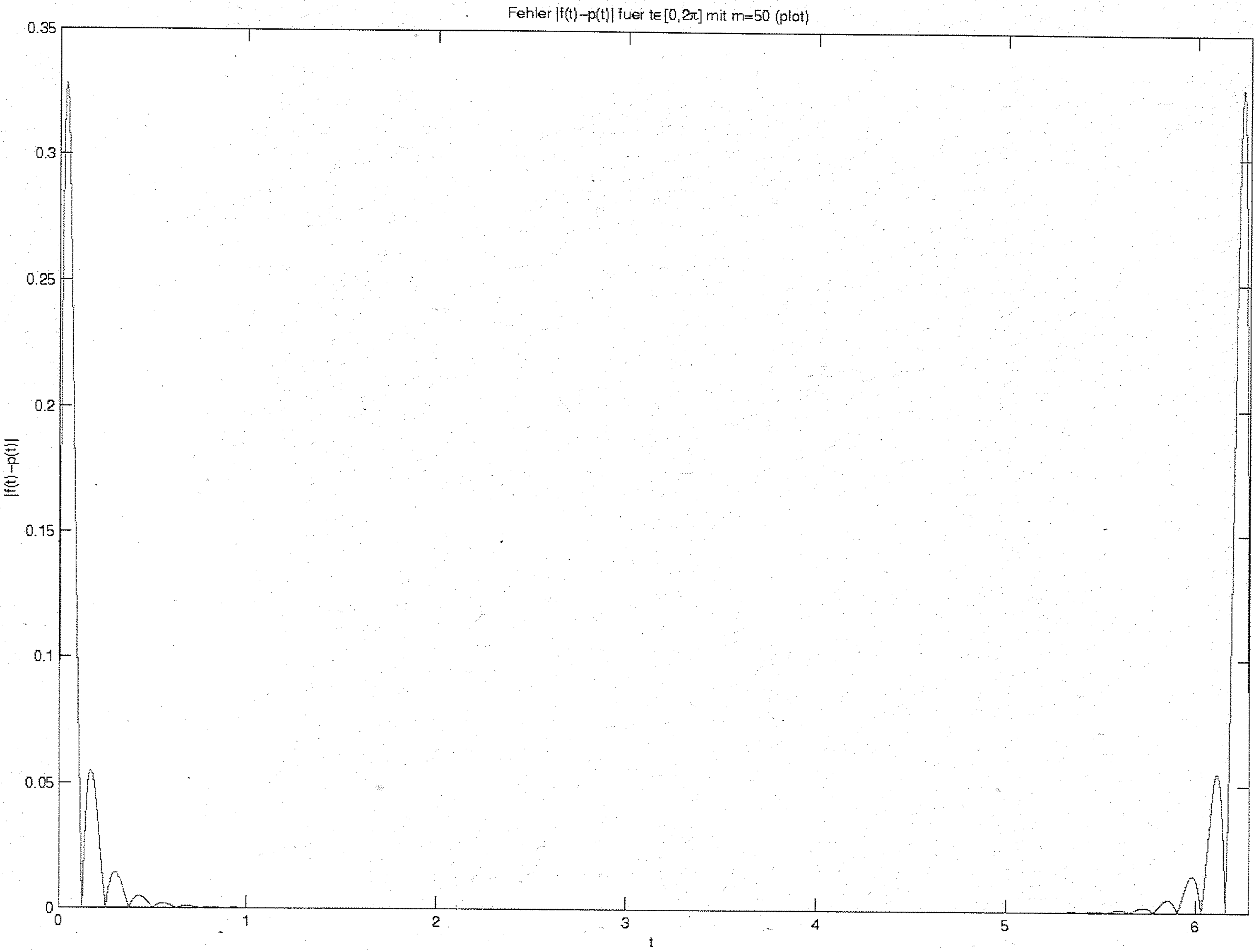

Fehler |f(t)−p(t)| fuer t∈[0,2π] mit m=26 (semilogy)
10^2
10^0
10^−2
10^−4
10^−6
10^−8
10^−10
10^−12
10^−14
10^−16
|f(t)−p(t)|
0
1
2
3
4
5
6
t

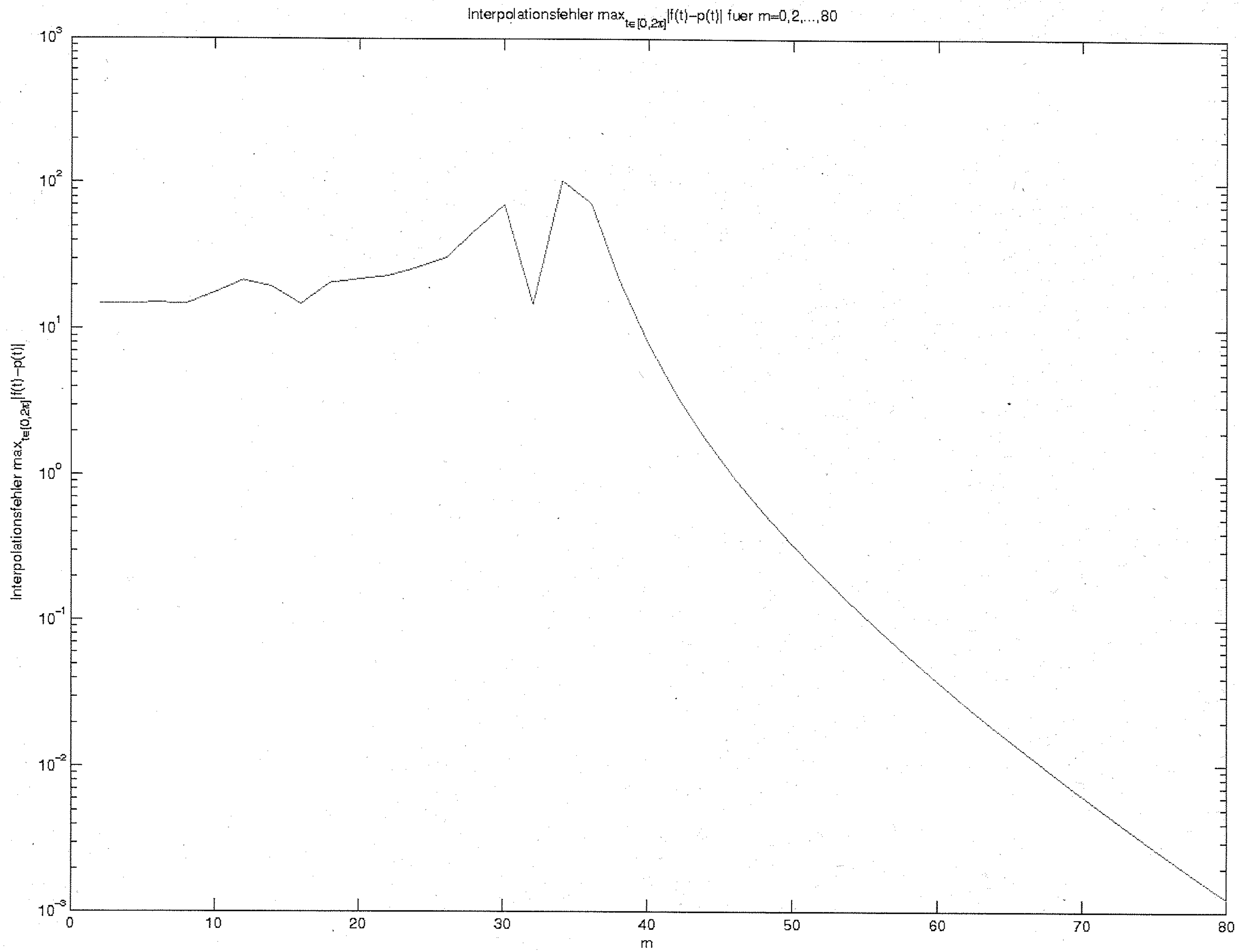
Fehler $|f(t)-p(t)|$ fuer $t\in[0,2\pi]$ mit $m=26$ (plot)



Fehler |f(t)−p(t)| fuer t∈[0,2π] mit m=50 (semilogy)




Fehler |f(t)−p(t)| fuer t∈[0,2π] mit m=50 (plot)
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
|f(t)−p(t)|
0
1
2
3
4
5
6
t



Interpolationsfehler $\max_{t\in[0,2\pi]}|f(t)-p(t)|$ fuer m=0,2,...,80
Interpolationsfehler $\max_{t\in[0,2\pi]}|f(t)-p(t)|$
10^{3}
10^{2}
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
0
10
20
30
40
50
60
70
80
m