Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 9
10.06.2010

Abgabe: Donnerstag, 17.06.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 23: (Programmieraufgabe, Intensitätsverteilungsproblem)
Betrachten Sie die aus der Vorlesung bekannte Integralgleichung für das Intensitätsverteilungsproblem

$$\alpha y(x) + \int_0^{10} K(x,\xi) y(\xi) d\xi = r(x), \quad x \in [0,10],$$

wobei die Einflussfunktion $K : [0,10] \times [0,10] \to \mathbb{R}$ und die rechte Seite $r : [0,10] \to \mathbb{R}$ gegeben sind durch

$$K(x,\xi) := \max\{0, 1 - |\beta(x-\xi)|\},$$
$$r(x) := 1 + \cos\left(\frac{5x}{\pi}\right).$$

Verwenden Sie für die folgenden Berechnungen die Parameter $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{200}$, $\alpha = 0, \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{10}, 1$.

(2) (a) Erstellen Sie zum Lösen des Intensitätsproblems zunächst eine Funktion, die das lineare Gleichungssystem $Ay = c$ erzeugt (vgl. Skript, Abschnitt 7.5). Benutzen Sie bei der Diskretisierung des Integrals die Trapezsumme zur Schrittweite h. Lösen Sie anschließend das lineare Gleichungssystem, indem Sie in einer weiteren Funktion eine LR-Zerlegung mit absoluter Spaltenpivotisierung durchführen. Hinweis: Sie können die LR-Zerlegung aus Aufgabe 21 verwenden.

(1) (b) Plotten Sie die Intensitätsverteilung $y : [0,10] \to \mathbb{R}$ für die obigen Parameter, also insgesamt 8 Plots.

(1) (c) Erweitern Sie die LR-Zerlegung derart, dass zusätzlich die Werte der Pivotelemente zurückgegeben werden. Geben Sie zu den obigen Parametern jeweils das betragsmäßig größte und kleinste Pivotelement aus.

(1) (d) Geben Sie zu den oben angegebenen Parametern jeweils die Konditionszahl der Matrix A aus. Hinweis: `cond(A)`.

(1) (e) Plotten Sie das Belegungsmuster der Matrix A für $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{200}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{10}, 1$. Hinweis: `spy(A)`.

(6 Punkte)

Aufgabe 24: (Gaußsches Eliminationsverfahren, LR-Zerlegung)
Sei $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ mit $m \in \mathbb{N}$. Weiter gelte

$$\exists\, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} (1)\colon v_i > 0 & \forall\, i = 1, \dots, m \\ \text{und} & \\ (2)\colon |A_{ii}| \cdot v_i > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} |A_{ij}| \cdot v_j & \forall\, i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Zeigen Sie

$$\exists\, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ L_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{m,1} & \cdots & L_{m,m-1} & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} R_{1,1} & \cdots & \cdots & R_{1,m} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & R_{m,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,m} : \quad A = L \cdot R,$$

d. h. die LR-Zerlegung kann ohne Pivotisierung durchgeführt werden.

(6 Punkte)

Aufgabe 25: (Vektor- und Matrixnormen)
Sei $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum mit einer beliebigen Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$.
Zeigen Sie:

(2) (a) $(\mathbb{C}^m, \|\cdot\|_*)$ ist ein normierter Raum versehen mit der Norm

$$\|\cdot\|_* : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}_+ \quad \text{mit} \quad \|z\|_* := \max_{\phi \in [0,2\pi]} \left\| \mathrm{Re}\left(e^{i\phi} z\right) \right\|.$$

(2) (b) $(\mathbb{C}^m, \|\cdot\|_*)$ ist eine Fortsetzung von $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$, d. h.

$$\|z\|_* = \|z\| \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m.$$

(2) (c) Die durch $\|\cdot\|_*$ induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_{M,*}$ ist eine Fortsetzung der durch $\|\cdot\|$ induzierten Matrixnorm $\|\cdot\|_M$, d. h.

$$\|A\|_{M,*} = \|A\|_M \quad \forall\, A \in \mathbb{R}^{m,m} \subset \mathbb{C}^{m,m}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 23:

Rückblick:

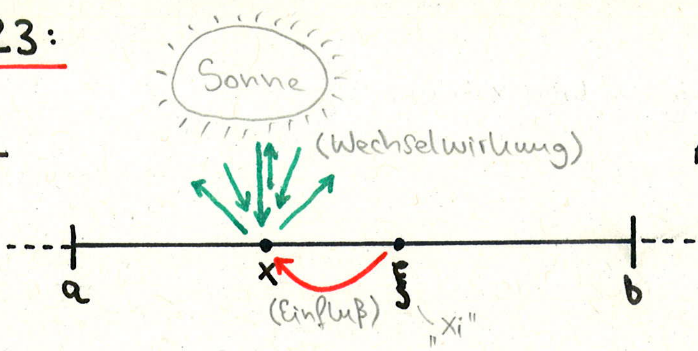
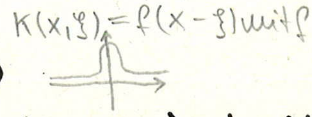


Abbildung ⇝ siehe nächste Seite

gesucht (unbekannt) { $y(x)$: Strahlungsintensität im Punkt x (z.B. Lichtintensität)



gegeben (bekannt):

$r(x)$: (z.B. Temperatur)

$K(x,\xi)$: Einflussfunktion (materialabhängig)

$\alpha \in [0,1]$: Absorptionskoeffizient (z.B. Lichtabsorption: α beschreibt die Wechselwirkung zwischen dem Licht und dem Stab, d.h. α gibt („prozentual") an, wie viel Energie (z.B. Wärme= energie) das Licht an den Stab abgibt. (materialabhängig)

$[a,b] \subset \mathbb{R}^1$: Stab ($\hat{=}$ eindimensionales abgeschlossenes Intervall)

Lösung: $y \in C([a,b],\mathbb{R})$ mit

$$r(x) = \alpha \cdot y(x) + \int_a^b K(x,\xi)\cdot y(\xi)\,d\xi \quad , x \in [a,b] \qquad (23.1)$$

Annahme: $\exists_1\, y \in C([a,b],\mathbb{R})$: y erfüllt (23.1)

Numerische Approximation: (Herleitung des Gleichungssystems)

$$x_i = a + i \cdot \underbrace{\frac{b-a}{N}}_{=:h} \quad , i = 0,\dots,N \quad \text{(Stützstellen)}$$

$$\overset{(23.1)}{\Rightarrow} r(x_i) = \alpha \cdot y(x_i) + \int_a^b \underbrace{K(x_i,\xi)\cdot y(\xi)}_{=:g(\xi)}\,d\xi \quad , i=0,\dots,N$$

Nun approximiere das Integral durch Trapezsumme

$$\int_a^b g(\xi)\,d\xi \approx T_h(g) = h\left(\frac{1}{2}g(a) + \sum_{j=1}^{N-1} g(x_j) + \frac{1}{2}g(b)\right)$$

d.h. wir betrachten ($y_i \approx y(x_i)$ ist Approx.)

$$r(x_i) = \alpha \cdot y_i + h\left(\frac{1}{2}K(x_i,a)\cdot y_0 + \sum_{j=1}^{N-1} K(x_i,x_j)\cdot y_j + \frac{1}{2}K(x_i,b)x_N\right) \quad i=0,\dots,N$$

$$\Rightarrow A \cdot y = c$$

mit

$$c_i = r(x_i)$$

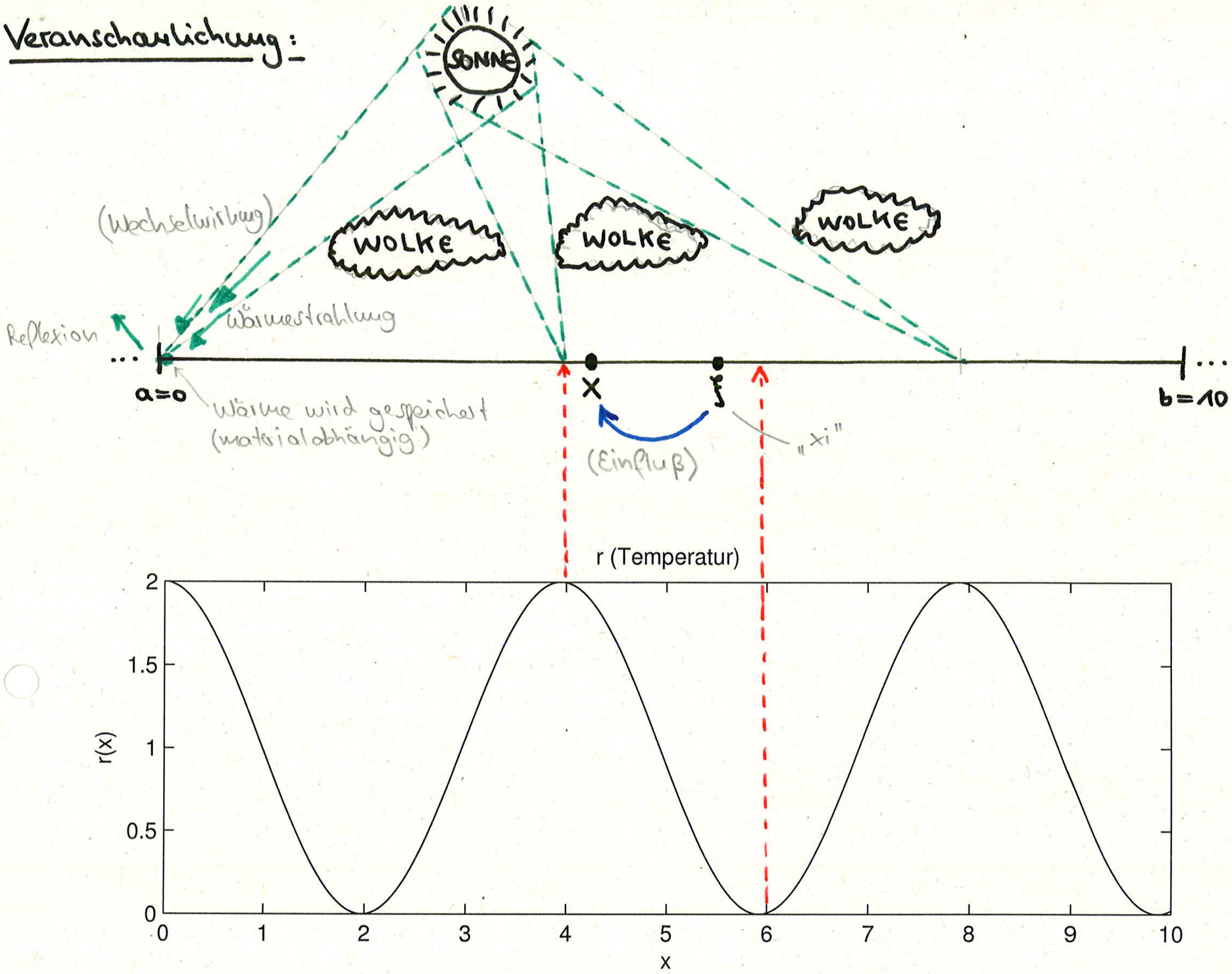
y_i gesucht

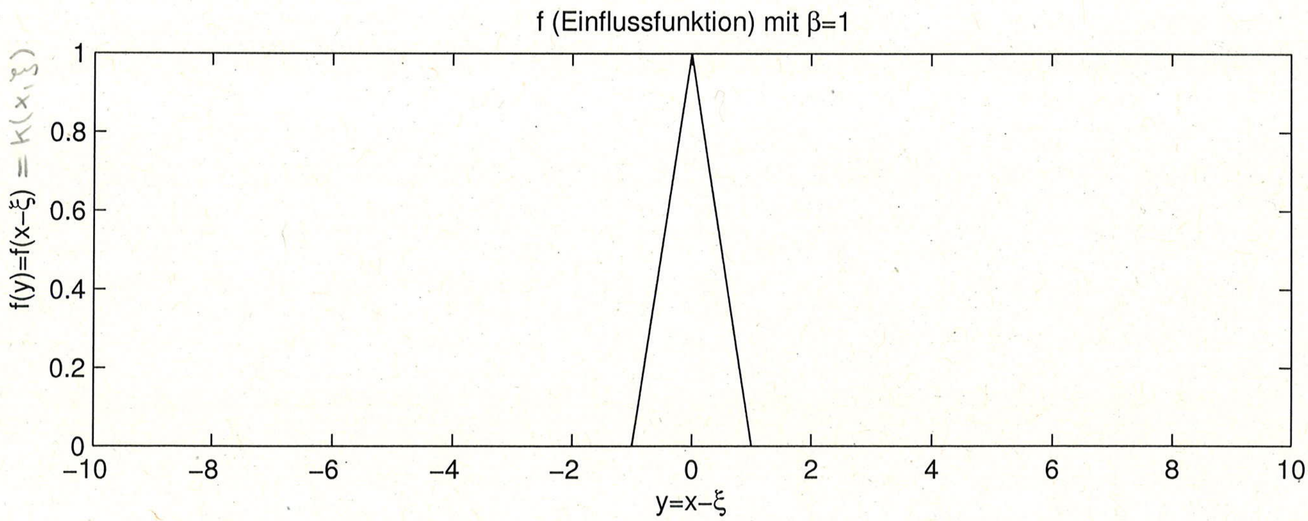
$$A_{ij} = \alpha \cdot \delta_{ij} + h \cdot \begin{cases} K(x_i,x_j) & , j = 1,\dots,N-1 \\ \frac{1}{2}K(x_i,x_j) & , j = 0,N \end{cases} \quad , i=0,\dots,N$$

$\alpha = 0$: schlecht konditioniert (⇝ Rundungsfehler)

$\alpha = 1$: gut konditioniert

Veranschaulichung:





Diese Funktion gibt an, inwiefern die Temperatur im Punkt ξ einen Einfluß auf die Temperatur im Punkt x hat. (~~aus~~ Wärmeleitung von ξ nach x) & umgekehrt.

Liegt ξ weit von x entfernt, so hat die Temperatur in ξ keinen (direkten) Einfluß mehr auf die Temperatur in x.

zu (a)

```
function aufgabe23

    % -----------------------------
    % |  Aufgabenteil  (a)   |
    % -----------------------------
    % Initialisierung
    a=0;
    b=10;
    h=[1/2,1/200];
    beta=1;
    alpha=[0;1/2];
    K=@(x,z,beta) max(0,1-abs(beta*(x-z)));
    r=@(x) 1+cos(5*x/pi);

    % Berechnung und Ausgabe
    disp('Ausgabe des Pivotintervalls zu den Laeufen');
    disp('==============================================');
    for i=1:length(alpha)
        fig1=figure;
        for j=1:length(h)
            disp(' ');
            fprintf('Lauf mit h = %4.3f, alpha = %2.1f\n', h(j), alpha(i));
            disp('-----------------------------------');
            % Berechnung
            [A,c]=intensitaet_LGS(a,b,h(j),alpha(i),beta,K,r);
            [y,pivot]=LR(A,c,2);
            % Ausgaben
            % 1. Plot
            set(0,'CurrentFigure',fig1)
            subplot(length(h),1,j);
            plot(a:h(j):b,y);
            title(char(['beta = ', num2str(beta), ...
                        ', alpha = ', num2str(alpha(i)), ...
                        ', h = ', num2str(h(j))]));
            % 2. Betragsm. minimaler und maximaler Wert der Pivoteintraege
            fprintf('Betrags-Minimum und -Maximum der Pivotelemente: [ %7.5e, %
7.5e ]\n', ...
                    min(abs(pivot)), max(abs(pivot)));
        end
    end
end

function [A,c]=intensitaet_LGS(a,b,h,alpha,beta,K,r)
%INTENSITAET_GLS Erzeugung des LGS's fuer das Intensitaetsproblem
%                    r(x)=alpha*y(x)+int_a^b K(x,z)*y(z) dz
%                unter Verwendung der Trapezsumme.
%   a       : linkes Intervallende des (1D-) Stabes
%   b       : rechtes Intervallende des (1D-) Stabes
%   h       : Schrittweite der Steutzstellen (h>0)
%   alpha   : Absorptionskoeffizient (0<=alpha<=1) (materialabhaengig)
%   beta    : Systemparameter
%   K       : Einflussfunktion (materialabhaengig)
%   r       :
%   A       : quadratische Matrix des LGS's
%   c       : rechte Seite des LGS's
```

```
    % Initialisierung
    xi=a:h:b;          % Stuetzstellen
    N=length(xi);      % Anzahl der Stuetzstellen
    A=zeros(N,N);

    % Erzeugung des Gleichungssystems
    c=r(xi)';
    for i=1:N
        A(i,1)=1/2*K(xi(i),xi(1),beta);
        for j=2:N-1
            A(i,2:N-1)=K(xi(i),xi(2:N-1),beta);
        end
        A(i,N)=1/2*K(xi(i),xi(N),beta);
    end
    A=alpha*eye(N)+h*A;
    fig2=figure;
    set(0,'CurrentFigure',fig2)
    spy(A);
    condA=cond(A);
    fprintf(['Kondition der Matrix A: cond(A) = ',num2str(condA),'\n']);
end

function [y,pivot]=LR(A,b,pivot_type)
%LR LR-Faktorisierung, LR-Zerlegung
%   A            : quadratische Matrix des LGS's
%   b            : rechte Seite des LGS's
%   pivot_type   : Typ der Pivotisierung
%                  1 : ohne Pivotisierung
%                  2 : absolute Spaltenpivotisierung
%                  3 : relative Spaltenpivotisierung
%   y            : Loesung des LGS's
%   pivot        : Werte an den Pivotstellen

    % Initialisierung
    m=length(b);           % Bestimmung der Dimension des LGS's
    y=zeros(m,1);          % Loesung
    r=zeros(1,m);          % Pivotstellen
    tau=zeros(1,m);        % Hilfsvektor
    pivot=zeros(m-1,1);    % Pivotwerte

    % -------------------------
    % |  1. Schritt: PA=LR   |
    % -------------------------
    for k=1:m-1
        % A. Pivotisierung:
        % A.1. ohne Pivotisierung
        if pivot_type==1
            r(k)=k;
            pivot(k)=A(k,k);
        % A.2. absolute Spaltenpivotisierung
        elseif pivot_type==2
            Amax=0;
            for i=k:m
                if abs(A(i,k))>Amax
```

```
                Amax=A(i,k);
                r(k)=i;
                pivot(k)=A(i,k);
            end
        end
    % A.3. relative Spaltenpivotisierung
    elseif pivot_type==3
        Amax=0;
        for i=k:m
            si=0;
            for j=k:m
                si=si+abs(A(i,j));
            end
            if abs(A(i,k))/si>Amax
                Amax=abs(A(i,k))/si;
                r(k)=i;
                pivot(k)=A(i,k);
            end
        end
    end

    % B. Zeilentausch
    if (r(k)~=k)
        tau(1,:)=A(k,:);
        A(k,:)=A(r(k),:);
        A(r(k),:)=tau(1,:);
    end

    % C. Elementare Zeilenumformung
    for i=k+1:m
        A(i,k)=A(i,k)/A(k,k);
        for j=k+1:m
            A(i,j)=A(i,j)-A(i,k)*A(k,j);
        end
    end
end

%  -----------------------
% |  2. Schritt: PB  |
%  -----------------------
for k=1:m-1
    if(r(k)~=k)
       tau(1,1)=b(k);
       b(k)=b(r(k));
       b(r(k))=tau(1,1);
    end
end
%Anmerkung: Pb=b

%  --------------------------
% |  3. Schritt: Lu=Pb  |
%  --------------------------
for i=2:m
    for j=1:i-1
        b(i)=b(i)-A(i,j)*b(j);
```

```
        end
    end
    %Anmerkung: u=b

    %  --------------------
    % |  4. Schritt: Ry=u  |
    %  --------------------
    for i=m:-1:1
        for j=i+1:m
            b(i)=b(i)-A(i,j)*b(j);
        end
        b(i)=b(i)/A(i,i);
    end

    y(:,1)=b;
end
```

Diskussion:

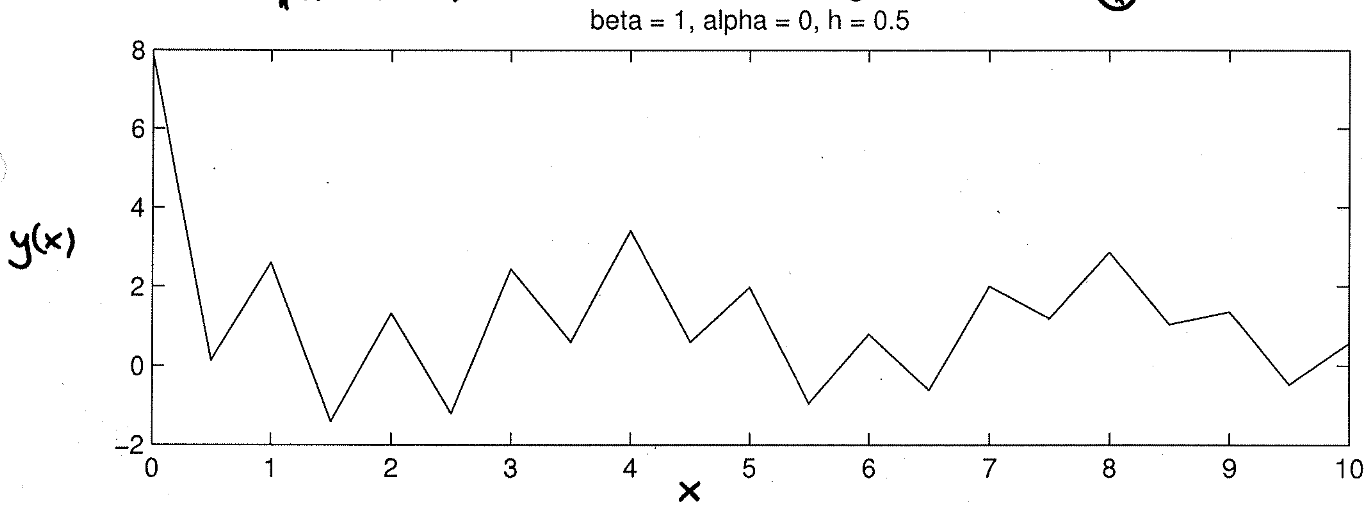
zu (b)

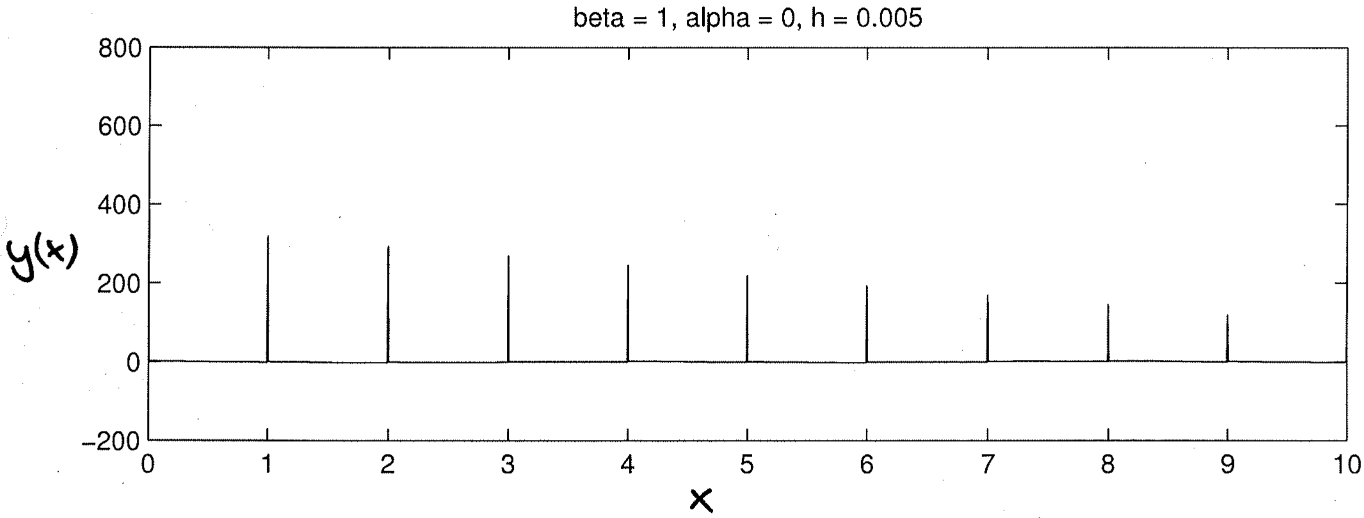
Grundsätzlich ist zu bemerken:

$\alpha = 1$ (100% Absorption) : Problem wohlgestellt
$\alpha = 0$ (0 % Absorption d.h. 100% Reflexion) : Problem nicht mehr wohlgestellt

Dies zeigen die folgenden Untersuchungen:

$\alpha = 0$ bedeutet: der Stab nimmt keine Wärmeenergie der Sonne auf.
β reguliert den Einflußbereich der Temperatur im Punkt x
„$\beta \to \infty$" $\Rightarrow$ Träger von $K \to \{x\}$ $\Rightarrow$ Gleichungssystemmatrix dünn besetzt mit (Band struktur)
„$\beta \to 0$" $\Rightarrow$ Träger von $K \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Gleichungssystemmatrix vollbesetzt
„$h \to 0$" $\Rightarrow$ Dimension des Gleichungssystems $\to \infty$ (*)



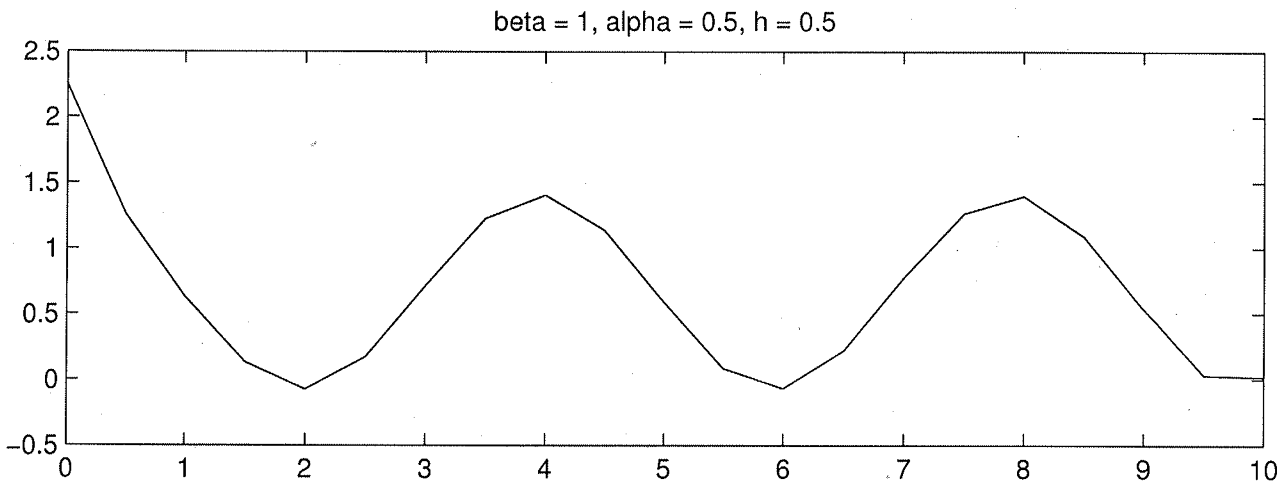


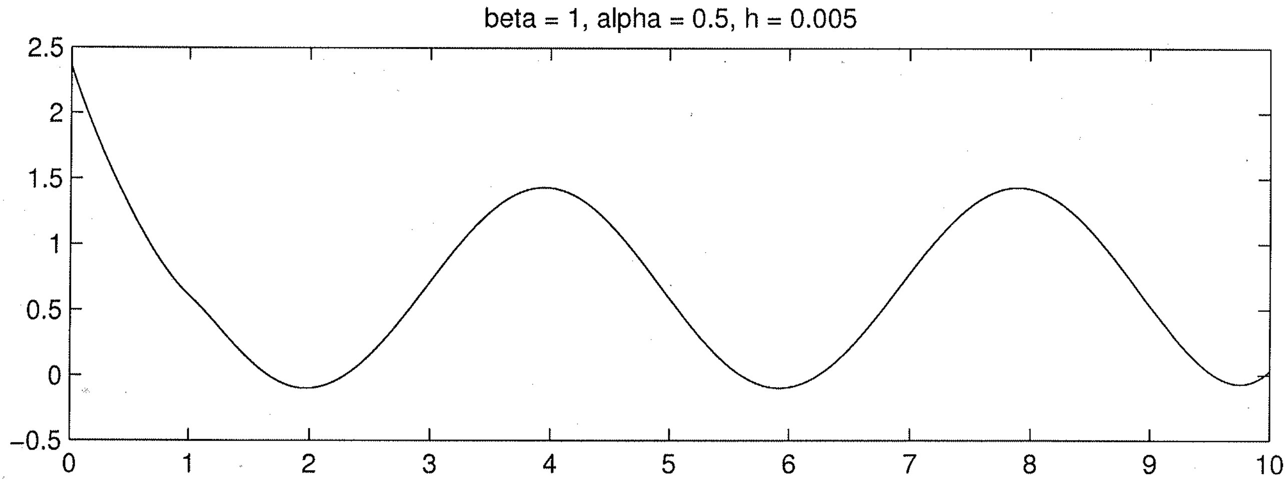
$\alpha = 0$: Für $h \to 0$ explodiert die Intensitätsverteilung $y(x)$
(Dies ist ein Anzeichen dafür, dass das Problem nicht wohlgestellt ist)

(*) Der Fall $h \ll 1$ und $\beta \ll 1$ ist daher sehr aufwändig zu lösen.

(!) β und h bestimmen wie breit das Band ist. Vorteil wenn $\beta \gg 1$ und $h \gg 0$ bei
$\Rightarrow$ Effiziente Initialisierung von A
$\Rightarrow$ Effizientes lösen des LGS's mit Sparsematrizen & LR-Zerlegung für Bandmatrizen

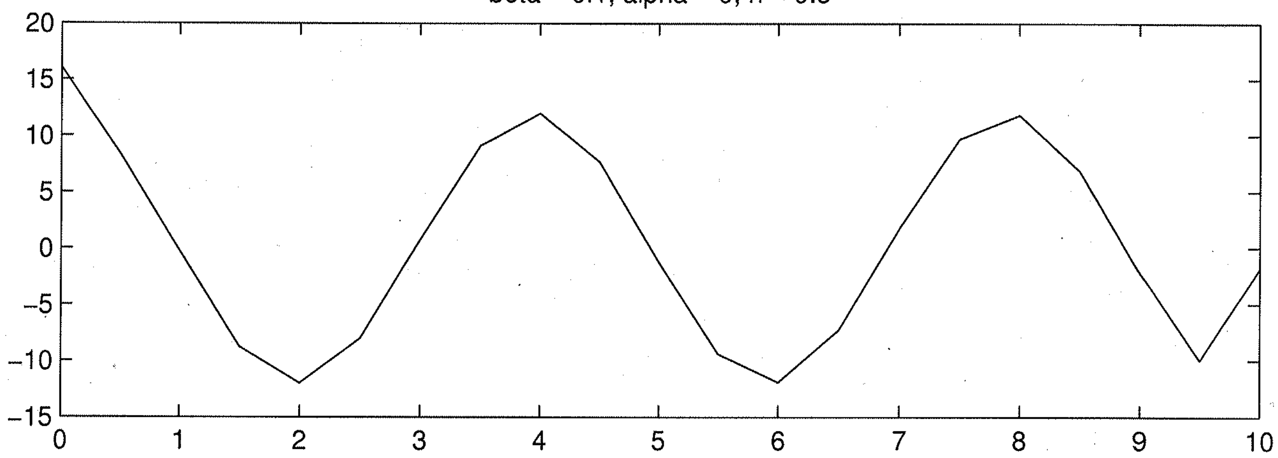
$\alpha = \frac{1}{2}$ bedeutet: der Stab nimmt 50 % an Wärmeenergie der Sonne auf.



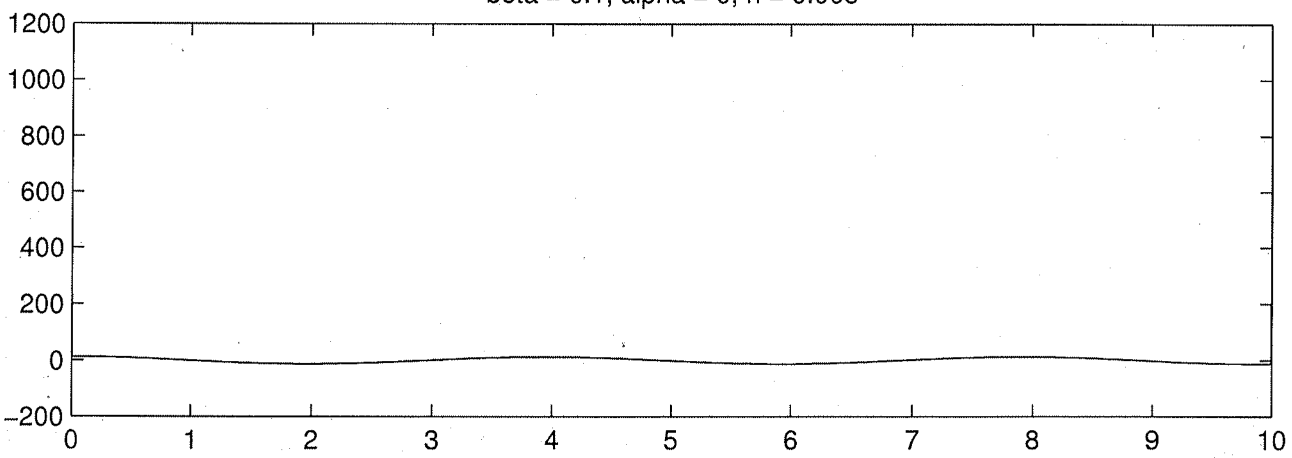


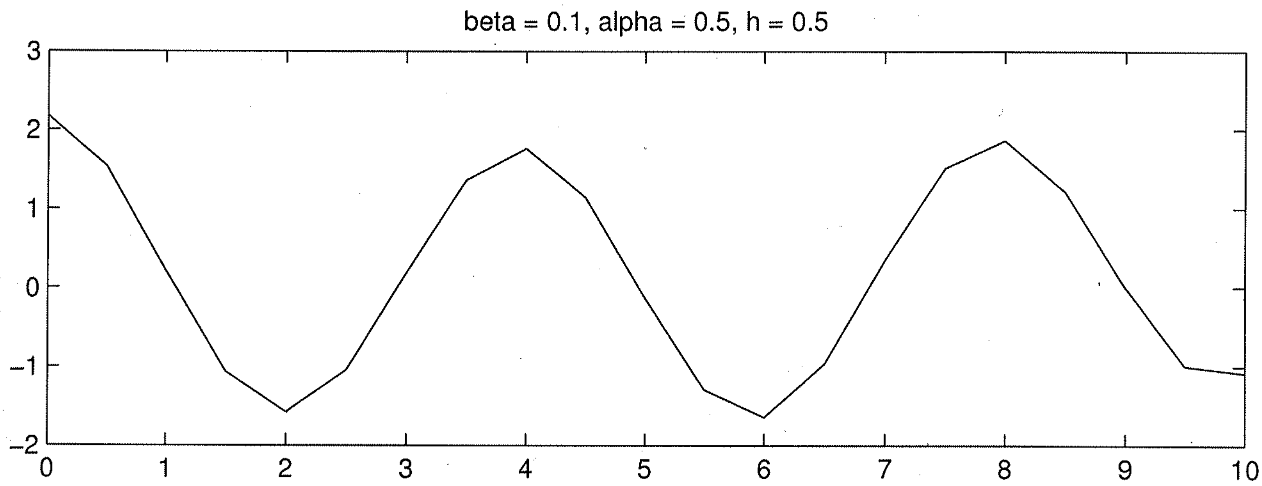
$\alpha = \frac{1}{2}$: Für $h \to 0$ explodiert die Intensitätsverteilung $y(x)$ nicht! Genauer erhalten wir für y eine glatte Funktion. (Dies ist ein Anzeichen dafür, dass das Problem wohlgestellt ist.)

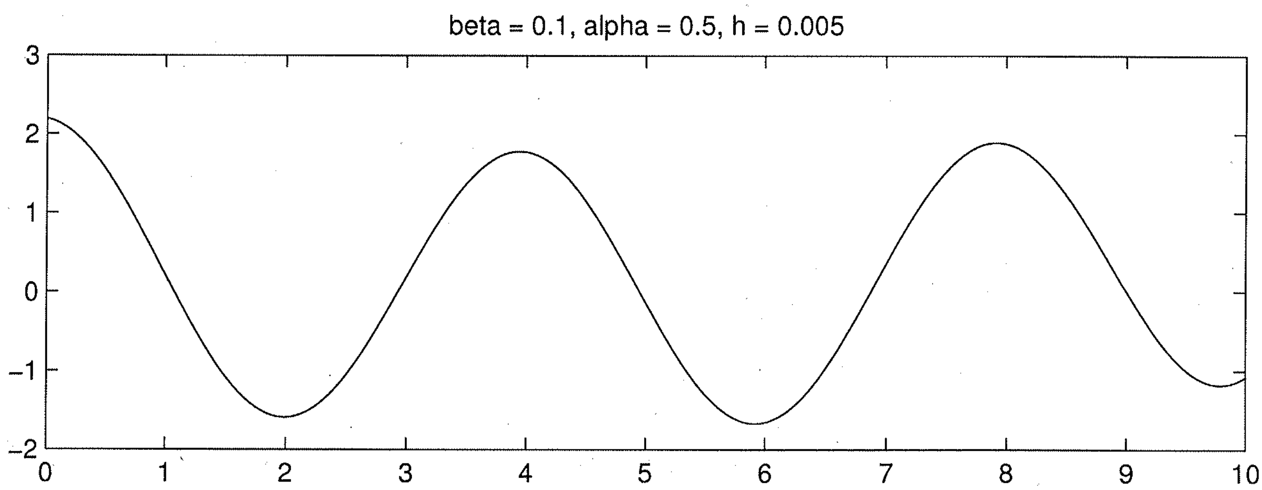
beta = 0.1, alpha = 0, h = 0.5



beta = 0.1, alpha = 0, h = 0.005




beta = 0.1, alpha = 0.5, h = 0.5
3
2
1
0
−1
−2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


beta = 0.1, alpha = 0.5, h = 0.005
3
2
1
0
−1
−2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

zu (c) und (d)

```
Ausgabe des Pivotintervalls zu den Laeufen mit beta = 1
=======================================================

Lauf mit h = 0.500, alpha = 0.0
------------------------------
Kondition der Matrix A: cond(A) = 196.419
Betrags-Minimum und -Maximum der Pivotelemente: [ 2.50000e-01, 3.75000e-01 ]

Lauf mit h = 0.005, alpha = 0.0
------------------------------
Kondition der Matrix A: cond(A) = 1960103.5909
Betrags-Minimum und -Maximum der Pivotelemente: [ 2.74863e-05, 2.50000e-03 ]

Lauf mit h = 0.500, alpha = 0.5
------------------------------
Kondition der Matrix A: cond(A) = 2.9593
Betrags-Minimum und -Maximum der Pivotelemente: [ 7.50000e-01, 9.58333e-01 ]

Lauf mit h = 0.005, alpha = 0.5
------------------------------
Kondition der Matrix A: cond(A) = 2.9861
Betrags-Minimum und -Maximum der Pivotelemente: [ 5.02500e-01, 5.04975e-01 ]

Ausgabe des Pivotintervalls zu den Laeufen mit beta = 1/10
==========================================================

Lauf mit h = 0.500, alpha = 0.0
------------------------------
Kondition der Matrix A: cond(A) = 553.0756
Betrags-Minimum und -Maximum der Pivotelemente: [ 4.77273e-02, 2.50000e-01 ]

Lauf mit h = 0.005, alpha = 0.0
------------------------------
Kondition der Matrix A: cond(A) = 5447614.1419
Betrags-Minimum und -Maximum der Pivotelemente: [ 4.99750e-06, 2.50000e-03 ]

Lauf mit h = 0.500, alpha = 0.5
------------------------------
Kondition der Matrix A: cond(A) = 14.3506
Betrags-Minimum und -Maximum der Pivotelemente: [ 6.60244e-01, 8.49583e-01 ]

Lauf mit h = 0.005, alpha = 0.5
------------------------------
Kondition der Matrix A: cond(A) = 14.5147
Betrags-Minimum und -Maximum der Pivotelemente: [ 5.01392e-01, 5.04975e-01 ]
```

Kondition von A:

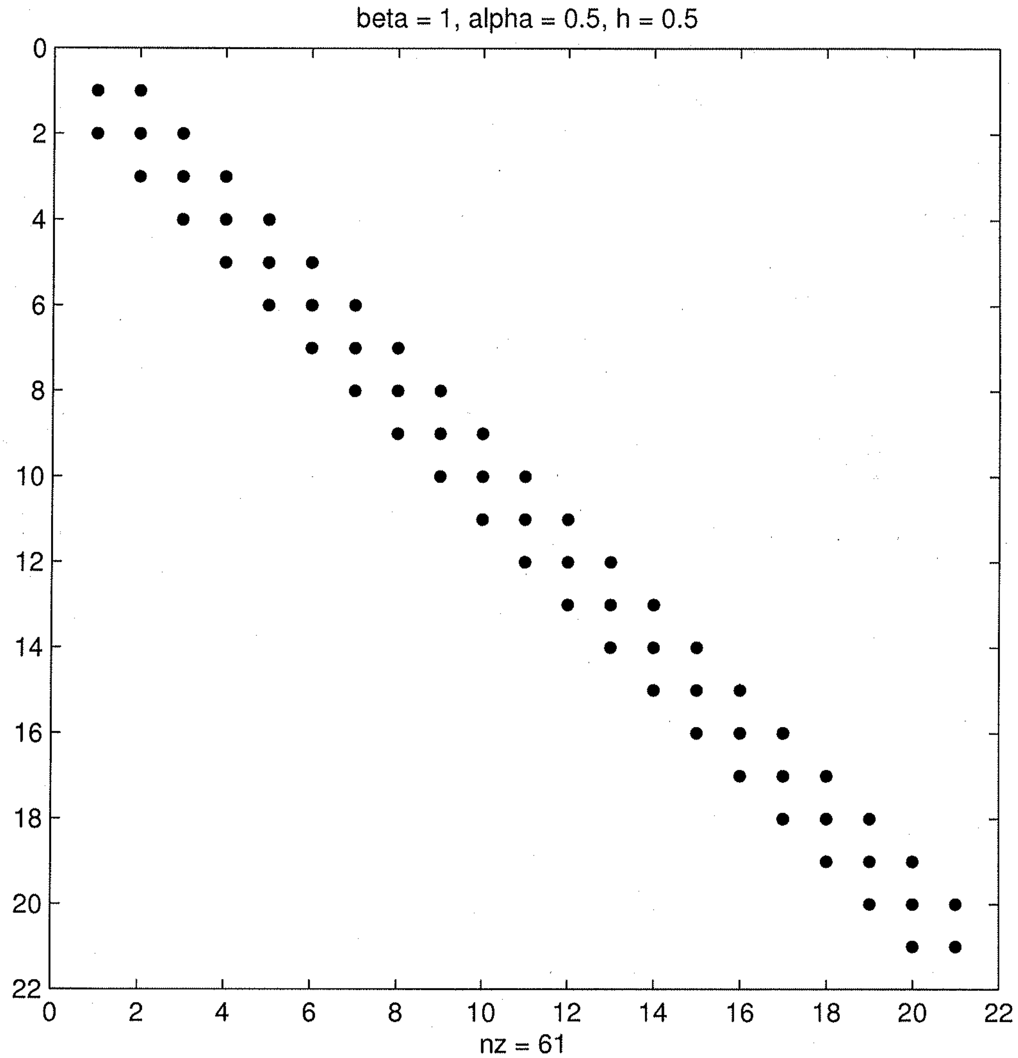
Für $\alpha = 0$ liegen hohe Konditionszahlen für A vor, die für $h \to 0$ immer größer werden ($\rightsquigarrow$ Problem nicht wohlgestellt), d.h. A ist schlecht konditioniert.

Für $\alpha = \frac{1}{2}$ hingegen sind die Konditionszahlen akzeptabel ($\rightsquigarrow$ Problem wohlgestellt), d.h. A ist gut konditioniert.

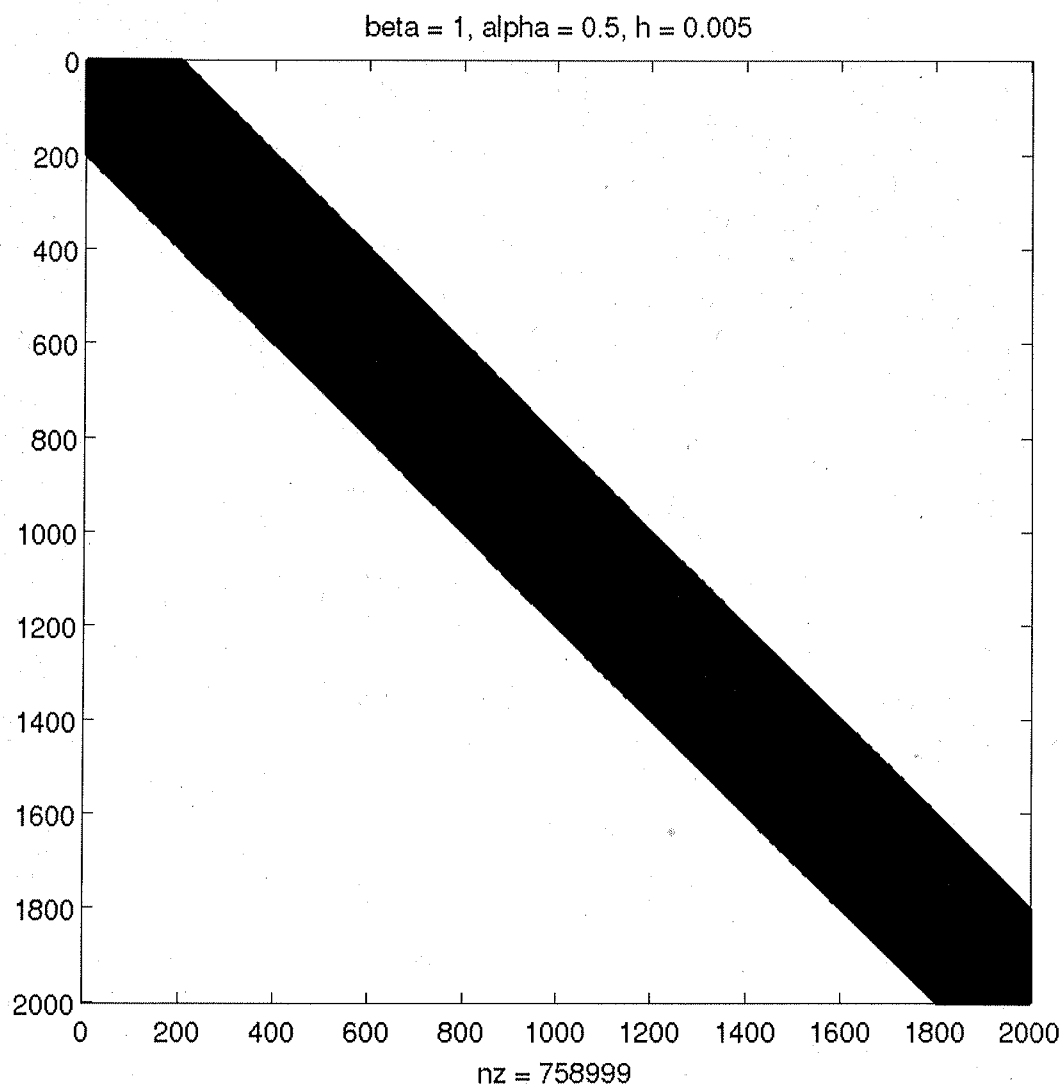
Pivotelemente von A:

Für $\alpha = 0$ werden die betragsmäßigen Pivotelemente immer kleiner & nähern sich der Maschinengenauigkeit für $h \to 0$ ($\rightsquigarrow$ Problem nicht wohlgestellt)

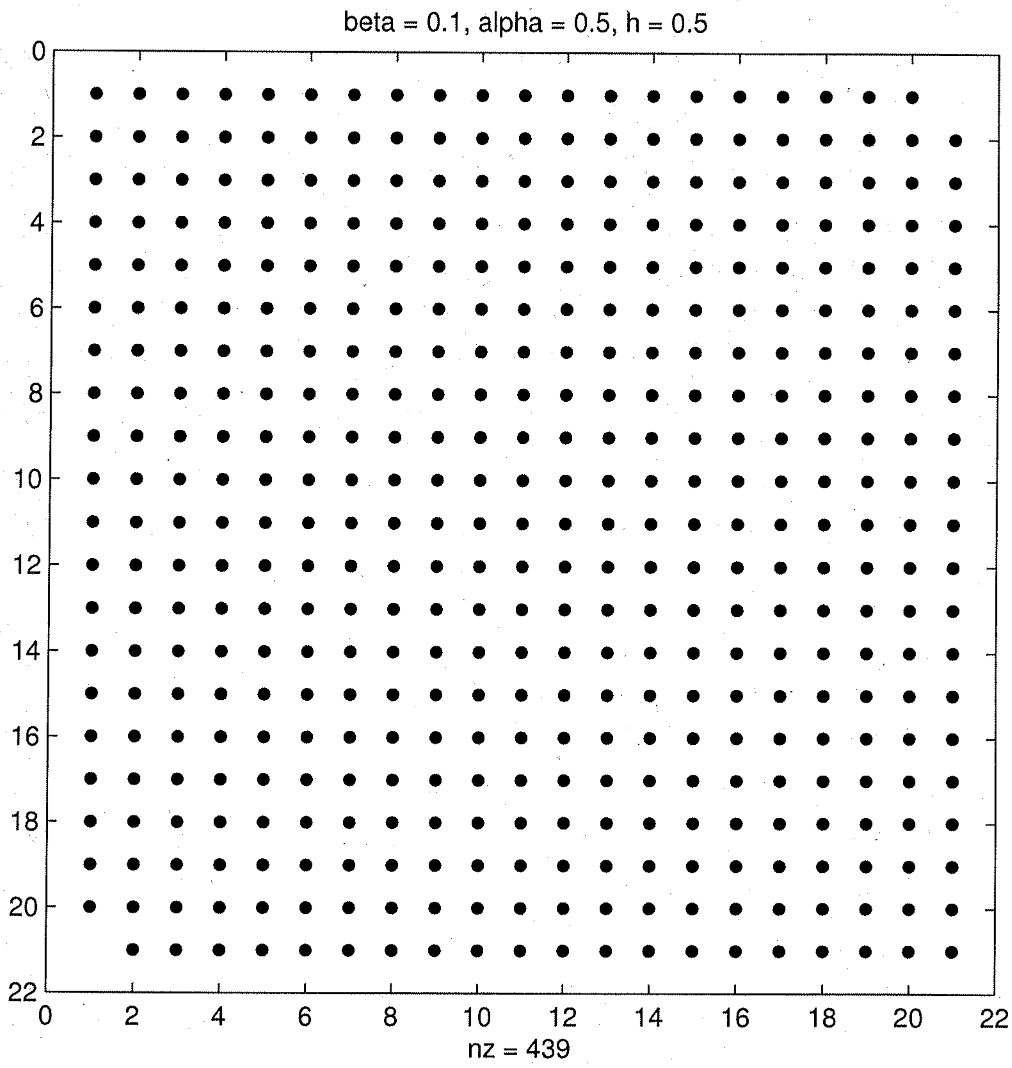
Für $\alpha = \frac{1}{2}$ werden die betragsmäßigen Pivotelemente zwar auch kleiner, jedoch wesentlich langsamer ($\rightsquigarrow$ Problem wohlgestellt) zu (e)



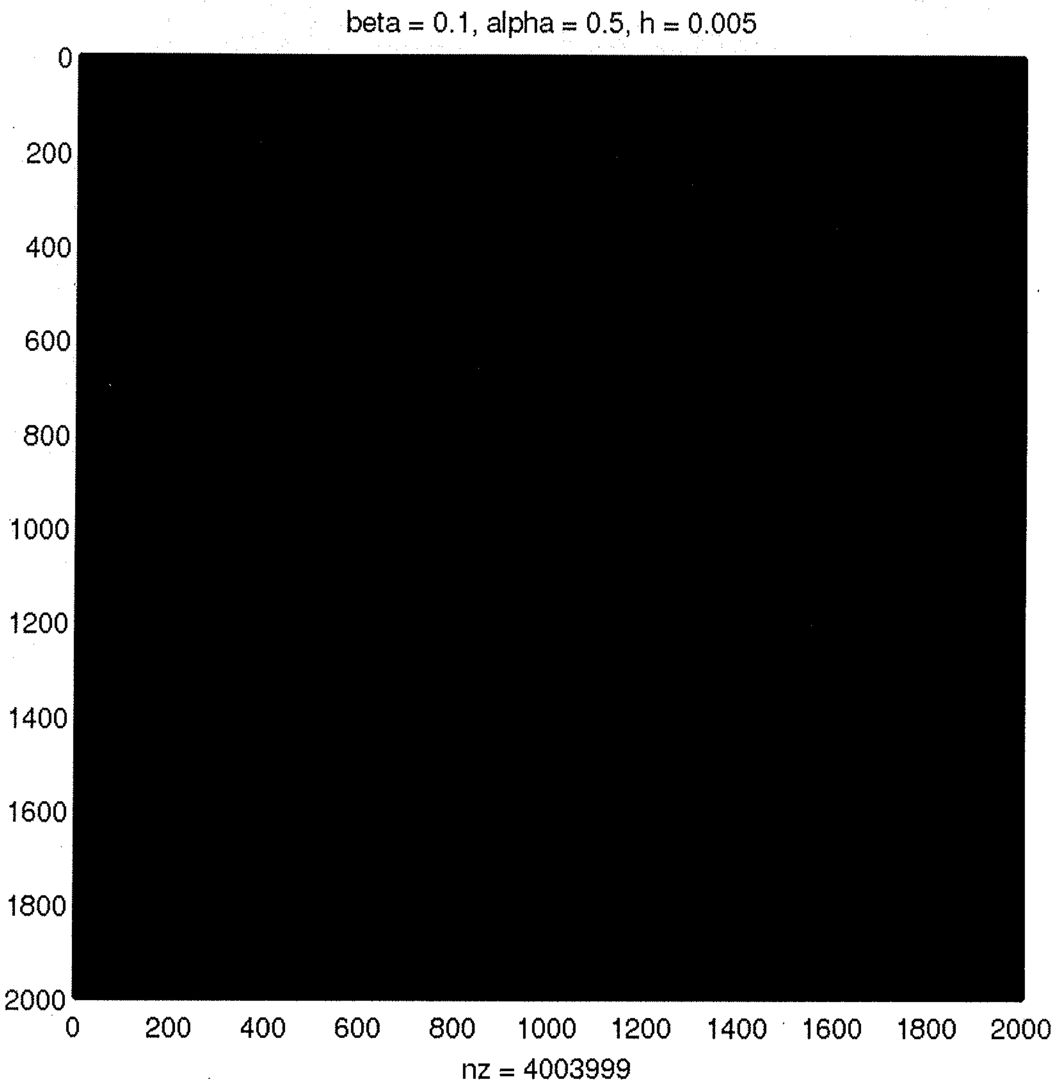
$\beta = 1$: Hier sehen wir, dass die Matrix A des LGS's nur auf den 3 Haupt-diagonalen Werte ungleich 0 enthält (insgesamt 61 Werte $\neq 0$). In diesem Fall ist A tridiagonal (und insbesondere dünn besetzt). Für derartige A werden wir in der Vorlesung ~~noch~~ eine effizientere LR-Methode kennenlernen.



$\beta = 1$: Für kleiner werdendes h bleibt A nach wie vor dünn besetzt und behält die Gestalt einer Banddiagonalmatrix.



$\beta = \frac{1}{10}$: Hier sehen wir, dass die Matrix A des LGS's beinahe (bis auf 2 Einträge) vollständig besetzt ist. In diesem Fall würde uns eine effizientere Methode des LR-Zerlegung nicht weiterhelfen und die Berechnung würde sehr viel mehr Zeit in Anspruch nehmen als im Fall $\beta = 1$.



$\beta = \frac{1}{10}$: Für kleiner werdende h bleibt A nahezu vollständig besetzt und das Lösen des LGS's nimmt viel Zeit in Anspruch.

Aufgabe 24:

$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$Ⓐ : \exists e \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} ①: e_i > 0 \quad \forall i = 1,\dots,m \\ \text{und} \\ ② : |A_{ii}| \cdot e_i > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} |A_{ij}| \cdot e_j \quad \forall i = 1,\dots,m \end{cases}$$

$$Ⓑ : \exists L, R \in \mathbb{R}^{m \times m} : A = L \cdot R \quad \begin{pmatrix} L: \text{l. untere } \Delta\text{'s-Matrix} \\ R: \text{r. obere } \Delta\text{'s-Matrix} \end{pmatrix}$$

Zeige: Ⓐ $\Rightarrow$ Ⓑ, d.h. der Gauß-Algorithmus kann ohne Pivotisierung (Zeilenvertauschung) durchgeführt werden.

Beweis:

Idee & Ansatz: Für $m=1$ werden wir sehen, dass die Zerlegung trivial ist. Daher können wir o.B.d.A. $m > 1$ betrachten. Für $m > 1$ zeigen wir, dass wir unter den Voraussetzungen ① und ② einen Schritt mit dem Gauß-Algorithmus durchführen können (1. Schritt). Anschließend zeigen wir, dass die dabei entstandene Untermatrix $A^{(1)}$ unsere Voraussetzungen ① und ② erfüllt (2. Schritt), wodurch wir erneut einen Schritt mit dem Gauß-Algorithmus durchführen können (vgl. 1. Schritt). Daraus folgt induktiv die Behauptung.

$m = 1$: Nach Voraussetzung gilt

$$\exists e_1 \in \mathbb{R} : e_1 > 0 \text{ und } |A_{11}| \cdot e_1 > \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{1} |A_{1j}| \cdot e_j}_{=0 \text{ (Leere Summe)}} = 0$$

$$\overset{e_1 > 0}{\Rightarrow} |A_{11}| > 0$$

Daher setze $L := 1$, $R := A_{11} = A \Rightarrow A = L \cdot R$.

$m > 1$: 1. Schritt: (zz: $|A_{11}| > 0$)

Wegen ② gilt (mit $i=1$)

$$|A_{11}| \cdot e_1 \underset{②}{>} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \underbrace{|A_{1j}|}_{\geq 0} \cdot \underbrace{e_j}_{\underset{①}{>0}} \geq 0 \overset{\substack{① \\ e_1 > 0}}{\Longrightarrow} |A_{11}| > \frac{0}{e_1} = 0$$

Somit kann der erste Schritt des Gauß-Verfahrens ohne Pivotisierung

$$\left(\text{d.h. } A_{ij} - \frac{A_{i1}}{A_{11}} \cdot A_{1j} \quad , \quad i = 2,\dots,m \, , \; j = 1,\dots,m \right)$$

durchgeführt werden und wir erhalten

$$A_1^* = \begin{bmatrix} A_{11} & * \text{———} * \\ 0 & \\ | & \boxed{A^{(1)}} \\ 0 & \end{bmatrix}$$

mit (vgl. Gauß-Alg.)

$$A^{(1)} := \left(A_{jl} - \frac{A_{j1}}{A_{11}} \cdot A_{1l} \right)_{\substack{j=2,\dots,m \\ l=2,\dots,m}} \in \mathbb{R}^{m-1 \times m-1}$$

bzw.

$$A_{ik}^{(1)} := A_{i+1,k+1} - \frac{A_{i+1,1}}{A_{11}} \cdot A_{1,k+1} \quad , \; i = 1,\dots,m-1 \, , \; k = 1,\dots,m-1$$

2. SCHRITT: (zz: $A^{(1)}$ erfüllt ① und ②)

zu ①: Sei $e^{(1)} := (e_2, \dots, e_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$, d.h. $e_j^{(1)} := e_{j+1}\ \forall j = 1, \dots, m-1$, dann ist $e_j^{(1)} = e_{j+1} > 0\ \forall j = 1, \dots, m-1$ nach Voraussetzung ① (für e) erfüllt.

zu ②: (zz: $|A_{ii}^{(1)}| \cdot e_i^{(1)} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-1} |A_{ij}^{(1)}| \cdot e_j^{(1)} \quad \forall i = 1, \dots, m-1$)

Sei $i \in \{1, \dots, m-1\}$ beliebig, aber fest. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
|A_{ii}^{(1)}| \cdot e_i^{(1)} &= \left| A_{i+1,i+1} - \frac{A_{i+1,1}}{A_{11}} \cdot A_{1,i+1} \right| \cdot e_{i+1} \\
&\overset{\text{①, umgekehrte }\Delta\text{'s-Ungleich.}}{\geq} \left| |A_{i+1,i+1}| - \frac{|A_{i+1,1}|}{|A_{11}|} \cdot |A_{1,i+1}| \right| \cdot e_{i+1} \\
&\overset{\text{①, } |x| \geq x}{\geq} |A_{i+1,i+1}| \cdot e_{i+1} - \frac{|A_{i+1,1}|}{|A_{11}|} \cdot |A_{1,i+1}| \cdot e_{i+1} \\
&\overset{②}{>} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i+1}}^{m} |A_{i+1,j}| \cdot e_j - \frac{|A_{i+1,1}|}{|A_{11}|} \cdot |A_{1,i+1}| \cdot e_{i+1} \\
&\overset{\text{Erweitern}}{=} \frac{|A_{i+1,1}|}{|A_{11}|} \cdot |A_{11}| \cdot e_1 + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i+1}}^{m} |A_{i+1,j}| \cdot e_j - \frac{|A_{i+1,1}|}{|A_{11}|} \cdot |A_{1,i+1}| \cdot e_{i+1} \\
&\overset{\text{② (mit } i=1)}{>} \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{m} \frac{|A_{i+1,1}|}{|A_{11}|} \cdot |A_{1j}| \cdot e_j + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i+1}}^{m} |A_{i+1,j}| \cdot e_j}_{j=i+1 \text{ Summand kürzt sich mit}} - \frac{|A_{i+1,1}|}{|A_{11}|} \cdot |A_{1,i+1}| \cdot e_{i+1} \\
&\overset{\text{zusammenfassen}}{=} \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i+1}}^{m} \left(\frac{|A_{i+1,1}|}{|A_{11}|} \cdot |A_{1j}| + |A_{i+1,j}| \right) \cdot e_j \\
&\overset{\text{①, }\Delta\text{'s Ungl.}}{\geq} \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i+1}}^{m} \left| A_{i+1,j} - \frac{A_{i+1,1}}{A_{11}} \cdot A_{1j} \right| \cdot e_j \\
&= \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i+1}}^{m} |A_{i,j-1}^{(1)}| \cdot e_{j-1} \\
&\overset{\text{umnummer.}}{=} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-1} |A_{i,j}^{(1)}| \cdot e_j \qquad \forall i = 1, \dots, m
\end{aligned}
$$

$j=1, j\neq 1 \Rightarrow j=2$

Damit ist Ⓐ für $A^{(1)}$ gezeigt und wir können (nach Schritt 1) mit $A^{(1)}$ einen Schritt mit dem Gauß-Algorithmus machen (was dem zweiten Schritt mit dem Gauß-Algorithmus für die Matrix A bedeutet). Induktiv folgt die Behauptung.

AUFGABE 25:

$(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}_+$ beliebige Norm auf $\mathbb{R}^m$ (denn in endlich-dimensionalen Räumen sind alle Normen zueinander äquivalent), d.h. $(m \in \mathbb{N})$

① : $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \ (\in \mathbb{R}^m)$ (Definitheit)

② : $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^m$ (absolute Homogenität)

③ : $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m$ (Δ's-Ungleichung)

Zeigen Sie:

ⓐ : $(\mathbb{C}^m, \|\cdot\|_*)$ ist ein normierter Raum versehen mit der Norm

$$\|\cdot\|_* : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{mit } \|z\|_* := \max_{\phi \in [0,2\pi]} \|\underbrace{\mathrm{Re}(e^{i\phi} z)}_{\text{(komponentenweise!)}}\|$$

d.h.

ⓘ : $\|z\|_* = 0 \Rightarrow z = 0 \in \mathbb{C}^m$

ⓘⓘ : $\|\beta \cdot z\|_* = |\beta| \cdot \|z\|_* \quad \forall \beta \in \mathbb{C} \ \forall z \in \mathbb{C}^m$

ⓘⓘⓘ : $\|z+w\|_* \leq \|z\|_* + \|w\|_* \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^m$

ⓑ : $(\mathbb{C}^m, \|\cdot\|_*)$ ist eine Fortsetzung von $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$, d.h.

$$\|z\|_* = \|z\| \quad \forall z \in \mathbb{R}^m \ (= \mathbb{C}^m|_{\mathbb{R}^m}) \subset \mathbb{C}^m$$

ⓒ : Die durch $\|\cdot\|_*$ induzierte Matrixnorm ist eine Fortsetzung der durch $\|\cdot\|$ induzierten Matrixnorm, d.h.

$$\|A\|_{M,*} = \|A\|_M \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m \times m} \ (= \mathbb{C}^{m \times m}|_{\mathbb{R}^{m \times m}}) \subset \mathbb{C}^{m \times m},$$

wobei

$$\|B\|_{M,*} := \sup_{\substack{z \neq 0 \\ z \in \mathbb{C}^m}} \frac{\|Bz\|_*}{\|z\|_*} = \sup_{\|z\|_* = 1} \|Bz\|_* \quad \forall B \in \mathbb{C}^{m \times m}$$

$$\|C\|_M := \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^m}} \frac{\|Cx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| = 1} \|Cx\| \quad \forall C \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

Beweis:

zu ⓐ : zu ⓘ : Sei $z \in \mathbb{C}^m$ mit $\|z\|_* = 0$.

$$\Rightarrow \quad 0 = \|z\|_* \overset{\text{Def.}}{=} \max_{\phi \in [0,2\pi]} \|\underbrace{\mathrm{Re}(e^{i\phi} z)}_{\in \mathbb{R}^m}\|$$

$$\overset{\|\cdot\| \geq 0}{\Longrightarrow} \quad \forall \phi \in [0,2\pi] : 0 = \|\mathrm{Re}(e^{i\phi} z)\|$$

$$\overset{①}{\Longrightarrow} \quad \forall \phi \in [0,2\pi] : 0 = \mathrm{Re}(e^{i\phi} z) \underset{z = r_z e^{i\phi_z}}{=} \mathrm{Re}(r_z \cdot e^{i(\phi + \phi_z)})$$

$$= \mathrm{Re}(r_z \cdot (\cos(\phi + \phi_z) + i \cdot \sin(\phi + \phi_z)))$$

$$\overset{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi}{=} r_z \cdot \cos(\phi + \phi_z) \quad \text{(Komponentenweise!!!)}$$

$$\Rightarrow r_z = 0 \Rightarrow z = 0$$

(Alternativ mit Widerspruch: Angenommen $z \neq 0$, ...)

zu ⓘⓘ :

$$\|\beta \cdot z\|_* \overset{\text{Def.}}{=} \max_{\phi \in [0,2\pi]} \|\mathrm{Re}(e^{i\phi} \cdot \beta \cdot z)\| \overset{\beta = r_\beta \cdot e^{i\phi_\beta}}{=} \max_{\phi \in [0,2\pi]} \|\mathrm{Re}(r_\beta \cdot \underbrace{e^{i\phi} \cdot e^{i\phi_\beta}}_{= e^{i\tilde{\phi}}} \cdot z)\|$$

exp ist $2\pi i$-periodisch!

$$= \max_{\substack{r_\beta \in \mathbb{R} \\ \phi \in [0,2\pi]}} \|\underbrace{r_\beta}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\mathrm{Re}(e^{i(\phi + \phi_\beta)} z)}_{\in \mathbb{R}^m}\| \underset{②}{=} |r_\beta| \cdot \max_{\phi \in [0,2\pi]} \|\mathrm{Re}(e^{i(\phi + \phi_\beta)} z)\|$$

$$= |r_\beta| \cdot \max_{\tilde{\phi} \in [0,2\pi]} \|\mathrm{Re}(e^{i\tilde{\phi}} z)\| = |\beta| \cdot \|z\|_* \quad \forall \beta \in \mathbb{C} \ \forall z \in \mathbb{C}^m$$

zu (iii):

$$\|z+w\|_* \overset{\text{Def.}}{=} \max_{\phi\in[0,2\pi]} \|\mathrm{Re}(e^{i\phi}(z+w))\|$$
$$\overset{\mathrm{Re}(u+v)=\mathrm{Re}\,u+\mathrm{Re}\,v}{=} \max_{\phi\in[0,2\pi]} \|\underbrace{\mathrm{Re}(e^{i\phi}z)}_{\in\mathbb{R}^m} + \underbrace{\mathrm{Re}(e^{i\phi}w)}_{\in\mathbb{R}^m}\|$$
$$\overset{③}{\leq} \max_{\phi\in[0,2\pi]} \left(\|\mathrm{Re}(e^{i\phi}z)\| + \|\mathrm{Re}(e^{i\phi}w)\|\right)$$
$$\leq \max_{\phi\in[0,2\pi]} \|\mathrm{Re}(e^{i\phi}z)\| + \max_{\phi\in[0,2\pi]} \|\mathrm{Re}(e^{i\phi}w)\|$$
$$\overset{\text{Def.}}{=} \|z\|_* + \|w\|_* \qquad \forall z,w\in\mathbb{C}^m$$

zu (b): Sei $z\in\mathbb{R}^m \left(=\mathbb{C}^m|_{\mathbb{R}^m}\right)\subset\mathbb{C}^m$, dann gilt:

$$\|z\|_* = \max_{\phi\in[0,2\pi]} \|\mathrm{Re}(e^{i\phi}z)\|$$
$$\overset{z=r_z\cdot e^{i\phi_z}}{=} \max_{\phi\in[0,2\pi]} \|\mathrm{Re}(r_z\cdot e^{i\phi}\cdot e^{i\phi_z})\|$$
$$\overset{e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi}{=} \max_{\phi\in[0,2\pi]} \|\mathrm{Re}\left(r_z\cdot(\cos\phi+i\cdot\sin\phi)\cdot(\cos\phi_z+i\cdot\underbrace{\sin\phi_z}_{\overset{!}{=}0\ (\text{da } z\in\mathbb{R}^m)})\right)\|$$

(denn: $z = \mathrm{Re}\,z + i\cdot\underbrace{\mathrm{Im}\,z}_{=0} = r_z\cdot(\cos\phi_z + i\cdot\underbrace{\sin\phi_z}_{=0})$)

$$= \max_{\phi\in[0,2\pi]} \|\mathrm{Re}\left(r_z\cdot(\cos\phi)\cdot(\cos\phi_z) + i\cdot r_z\cdot(\sin\phi)\cdot(\cos\phi_z)\right)\|$$
$$= \max_{\phi\in[0,2\pi]} \|\underbrace{r_z\cdot(\cos\phi_z)}_{\in\mathbb{R}^m}\cdot\underbrace{(\cos\phi)}_{\mathbb{R}}\|$$
$$\overset{②}{=} \|\underbrace{r_z\cdot(\cos\phi_z)}_{=z}\|\cdot\underbrace{\max_{\phi\in[0,2\pi]}|\cos\phi|}_{=1} = \|z\| \qquad \forall z\in\mathbb{R}^m\subset\mathbb{C}^m$$

zu (c): 1. zz: $\|A\|_{M,*} \leq \|A\|_M \quad \forall A\in\mathbb{R}^{m\times m}$

$$\|A\|_{M,*} \overset{\text{Def.}}{=} \sup_{z\in\mathbb{C}^m}\frac{\|Az\|_*}{\|z\|_*} \overset{\text{Def.}}{=} \sup_{z\in\mathbb{C}^m}\frac{\max_{\phi\in[0,2\pi]}\|\mathrm{Re}(e^{i\phi}\underbrace{A}_{\mathbb{R}^{m\times m}}\underbrace{z}_{\in\mathbb{C}^m})\|}{\|z\|_*}$$
$$\overset{\oplus}{=} \sup_{z\in\mathbb{C}^m}\frac{\max_{\phi\in[0,2\pi]}\|A\cdot\mathrm{Re}(e^{i\phi}z)\|}{\|z\|_*} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Verträglichkeit von}\\ \|.\|\text{ und }\|.\|_M\ (\text{da } A\in\mathbb{R}^{m\times m})}}{\leq} \|A\|_M\cdot\underbrace{\sup_{z\in\mathbb{C}^m}\frac{\overbrace{\max_{\phi\in[0,2\pi]}\|\mathrm{Re}(e^{i\phi}z)\|}^{=\|z\|_*}}{\|z\|_*}}_{=1}$$
$$= \|A\|_M \qquad \forall A\in\mathbb{R}^{m\times m}$$

2. zz: $\|A\|_M \leq \|A\|_{M,*}$

$$\|A\|_M = \sup_{z\in\mathbb{R}^m}\frac{\|\overbrace{Az}^{\in\mathbb{R}^m\ (\text{da } A\in\mathbb{R}^{m\times m})}\|}{\|z\|} \overset{(b)}{=} \sup_{z\in\mathbb{R}^m}\frac{\|Az\|_*}{\|z\|_*} \leq \sup_{z\in\mathbb{C}^m}\frac{\|Az\|_*}{\|z\|_*} = \|A\|_{M,*}$$

$$\Rightarrow \|A\|_M = \|A\|_{M,*} \quad \forall A\in\mathbb{R}^{m\times m}$$

zu $\oplus$: $\mathbb{C}^m \ni z = z_1 + i\cdot z_2,\ z_1,z_2\in\mathbb{R}^m$

$$\mathrm{Re}(e^{i\phi}Az) = \mathrm{Re}\left((\cos\phi + i\cdot\sin\phi)\cdot(Az_1 + i\cdot Az_2)\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(\cos\phi\cdot Az_1 + i\cdot\cos\phi\cdot Az_2 + i\cdot\sin\phi\cdot Az_1 - \sin\phi\cdot Az_2\right)$$
$$= \cos\phi\cdot Az_1 - \sin\phi\cdot Az_2$$
$$= A\cdot(\cos\phi\cdot z_1 - \sin\phi\, z_2)$$
$$= A\cdot\mathrm{Re}(e^{i\phi}z)$$