Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 10
17.06.2010

Abgabe: Donnerstag, 24.06.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 26: (Invertierbarkeit von Matrizen)

2 (a) Seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $A \in \mathbb{K}^{m,m}$ invertierbar und $u, v \in \mathbb{K}^m$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $B := A + uv^T$ ist invertierbar.

(ii) $\alpha := 1 + v^T A^{-1} u \neq 0$.

Hinweis: Für $\alpha \neq 0$ gilt die Formel $B^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\alpha}\left(A^{-1}uv^TA^{-1}\right)$.
(Sherman-Morrison Formel)

(b) Sei $A = (A_{ij})_{i,j=1,\ldots,m} \in \mathbb{R}^{m,m}$ mit

$$A_{ij} = \begin{cases} 2 & , i = j = 1 \\ 3 & , i = j,\ i = 2, \ldots, m \\ 1 & , i + 1 = j,\ i = 1, \ldots, m-1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

und $E = (E_{ij})_{i,j=1,\ldots,m} \in \mathbb{R}^{m,m}$ mit zufälligen Einträgen $E_{ij} \in [-1, 1]$.

1 (iii) Bestimmen Sie die Inverse A^{-1}.

1 (iv) Berechnen Sie die Spaltensummennorm $\|A^{-1}\|_1$ von A^{-1}.

1 (v) Untersuchen Sie die Invertierbarkeit von $B_h := A + hE \in \mathbb{R}^{m,m}$ für $h \geqslant 0$.
Hinweis: Verwenden Sie das Banach-Lemma sowie (iii) und (iv).

1 (vi) Geben Sie eine obere Schranke $\bar{h}$ in Abhängigkeit von m an, so dass B_h für $h \in [0, \bar{h}]$ invertierbar ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 27: (Programmieraufgabe, Gesamtschrittverfahren, LR-Zerlegung)
Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$B_h y = b. \tag{1}$$

Hierbei sei $B_h := A + hE \in \mathbb{R}^{m,m}$ mit den Matrizen A und E aus Aufgabe 26 (b), $b := (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$ und $m = 1200$. Die Störung E sei wie oben zufällig gewählt (vgl. Hinweis) und die Größe der Störung sei $h = \frac{1}{1200}$ bzw. $h = \frac{1}{9}$.

(a) Implementieren Sie das Gesamtschrittverfahren (GSV), indem Sie eine Funktion der Form

$$[y, iter] = \texttt{GSV}(A, b, eps)$$

erzeugen. Verwenden Sie dabei zu der gegebenen Toleranz $\varepsilon > 0$ die Abbruchbedingung

$$\|y_{n+1} - y_n\|_1 \leqslant \varepsilon.$$

(b) Berechnen Sie mit dem Gesamtschrittverfahren eine Approximation y_{GSV} der Lösung von (1) und geben Sie die Anzahl der benötigten Iterationen des Gesamtschrittverfahrens aus. Verwenden Sie dazu die Toleranz $\varepsilon = 10^{-6}$ bzw. $\varepsilon = 10^{-12}$.

(c) Berechnen Sie mit der LR-Zerlegung (vgl. Aufgabe 18 bzw. Skript) insgesamt drei Approximationen $y_{\mathrm{LR},1}, y_{\mathrm{LR},2}, y_{\mathrm{LR},3}$ der Lösung von (1) ($y_{\mathrm{LR},1}$ ohne Pivotisierung, $y_{\mathrm{LR},2}$ absolute Spaltenpivotisierung, $y_{\mathrm{LR},3}$ relative Spaltenpivotisierung).

(d) Messen Sie die Laufzeiten für die einzelnen Berechnungen. Hinweis: `tic`, `toc`.

(e) Vergleichen Sie die Güte der Approximation

$$\|y - \bar{y}\|_1$$

zwischen den Lösungen $y \in \{y_{\mathrm{GSV}}, y_{\mathrm{LR},1}, y_{\mathrm{LR},2}, y_{\mathrm{LR},3}\}$ und der von Matlab gelieferten Lösung $\bar{y} = B_h \backslash b$.

(f) Interpretieren Sie die erhaltenen Ergebnisse.

Hinweis: Zur besseren Vergleichbarkeit der Lösungen verwenden Sie (in MATLAB) folgenden Programmcode zum Aufbau von E:

```
rand('state', 3);
E = 2 * rand(m) - ones(m);
```

Hierdurch wird erreicht, dass die Zufallsmatrix E bei jedem Aufruf die gleichen Einträge besitzt.

(6 Punkte)

Aufgabe 28: (Spezielle Form der LR-Zerlegung, Aufwand)
Sei $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ invertierbar, $u, v \in \mathbb{R}^m$ und

$$\widetilde{A} := \begin{pmatrix} A & u \\ v^T & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1,m+1}.$$

3 (a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\widetilde{A}$ ist invertierbar.

(ii) $v^T A^{-1} u \neq 0$.

(b) Sei $\widetilde{A}$ invertierbar und sei die LR-Zerlegung von A bereits bekannt (d. h. $Ay = c$ kann aufgelöst werden).

2 (iii) Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Berechnung der Lösung von

$$\widetilde{A}x = b \tag{2}$$

an, ohne für $\widetilde{A}$ die LR-Zerlegung berechnen zu müssen.

1 (iv) Wie groß ist der Aufwand zur Bestimmung der Lösung von (2), wenn die LR-Zerlegung von A bekannt ist?

(6 Punkte)

Aufgabe 26

zu (a): „(i) $\Leftarrow$ (ii)": Es gelte $\alpha := 1 + v^T A^{-1} u \neq 0$, dann gilt

$$\overbrace{B\cdot\left(A^{-1} - \tfrac{1}{\alpha} A^{-1} u v^T A^{-1}\right)}^{\text{wohldefiniert, da } \alpha \neq 0}$$

$$\overset{\text{Def. v. } B}{=} (A + uv^T)\cdot\left(A^{-1} - \tfrac{1}{\alpha} A^{-1} u v^T A^{-1}\right)$$

$$\overset{\text{ausmulti.}}{=} I + uv^T A^{-1} - \tfrac{1}{\alpha}\left(uv^T A^{-1} + uv^T A^{-1} u v^T A^{-1}\right)$$

$$\overset{\text{Def. v. } \alpha}{=} I + uv^T A^{-1} - \frac{u\cancel{(1 + v^T A^{-1} u)} v^T A^{-1}}{\cancel{(1 + v^T A^{-1} u)}}$$

$$\overset{\text{Kürzen}}{=} I + uv^T A^{-1} - uv^T A^{-1} = I$$

$$\Rightarrow B \text{ invertierbar mit } B^{-1} = \left(A^{-1} - \tfrac{1}{\alpha} A^{-1} u v^T A^{-1}\right)$$

„(i) $\Rightarrow$ (ii)": Sei B invertierbar. Angenommen es gilt $\alpha = 0$, dann folgt aus der Definition von α

$$\alpha := 1 + v^T A^{-1} u \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad v^T A^{-1} u = -1 \qquad (26.1)$$

Damit gilt insbesondere $u, v \neq 0 \ (\in \mathbb{R}^m)$. Weiter gilt

- A invertierbar (nach Vor.) $\Rightarrow A^{-1}$ invertierbar
- $B := A + uv^T$ invertierbar (nach (i))

$\Big\} \Rightarrow B\cdot A^{-1}$ invertierbar

$$B\cdot A^{-1} = (A + uv^T)\cdot A^{-1} = I + uv^T A^{-1} \qquad (26.2)$$

Damit gilt

$$\underset{\substack{\uparrow \\ u \neq 0 \\ B\cdot A^{-1} \text{ besitzt vollen Rang}}}{0 \neq} B\cdot A^{-1} u \underset{\substack{\uparrow \\ (26.2)}}{=} u + uv^T A^{-1} u \underset{\substack{\uparrow \\ (26.1)}}{=} u + u\cdot(-1) = 0 \quad ↯ \text{ zu } \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha := 1 + v^T A^{-1} u \overset{!}{\neq} 0$$

zu (iii):

zu (b): Da die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ & 3 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 3 \end{pmatrix}$$

bereits in rechter oberer Δ'sform vorliegt, ist eine Bestimmung des Inversen durch Auflösung der Gleichungssysteme

$$A \cdot y_j = e_j \quad , \quad j = m, \dots, 1$$

leicht möglich, wobei $y_j \in \mathbb{R}^m$ die Spalten des Inversen A^{-1} werden:

m. Schritt: $(j = m)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ & 3 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 3 \end{pmatrix} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} y_{1m} \\ | \\ y_{mm} \end{pmatrix}}^{y_m} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{e_m}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 2\cdot y_{1m} + y_{2m} &= 0 & \Rightarrow y_{1m} &= (-1)^{m-1}\cdot 3^{-(m-1)} \\
3\cdot y_{2m} + y_{3m} &= 0 & \Rightarrow y_{2m} &= (-1)^{m-2}\cdot 3^{-(m-1)} \\
\vdots \qquad \vdots \quad &\ \ \vdots & & \\
3\cdot y_{m-1,m} + y_{mm} &= 0 & \Rightarrow y_{m-1,m} &= -\tfrac{1}{3^2} = (-1)^1\cdot 3^{-2} \\
3\cdot y_{m,m} &= 1 & \Rightarrow y_{mm} &= \tfrac{1}{3} = (-1)^0\cdot 3^{-1}
\end{aligned}$$

j-ter Schritt: $(1<j<m)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ & 3 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 3 \end{pmatrix}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{jj} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{pmatrix}}_{y_j} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_j} \longleftarrow \text{j-ter Eintrag}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 2\cdot y_{1j} + y_{2j} &= 0 & \Rightarrow y_{1j} &= \tfrac{1}{2}(-1)^{j-1}\cdot 3^{-(j-1)} \\
3\cdot y_{2j} + y_{3j} &= 0 & \Rightarrow y_{2j} &= (-1)^{j-2}\cdot 3^{-(j-1)} \\
\vdots \qquad \vdots &\quad \vdots & & \\
3\cdot y_{j-1,j} + y_{jj} &= 0 & \Rightarrow y_{j-1,j} &= -\tfrac{1}{3^2} = (-1)^1\cdot 3^{-2} \\
3\cdot y_{jj} + y_{j+1,j} &= 1 & \Rightarrow y_{jj} &= \tfrac{1}{3} = (-1)^0\cdot 3^{-1} \\
\vdots \qquad \vdots &\quad \vdots & \Rightarrow y_{j+1,j} &= 0 \\
3\cdot y_{mj} &= 0 & \Rightarrow y_{mj} &= 0
\end{aligned}$$

1. Schritt: $(j=1)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ & 3 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 3 \end{pmatrix}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{m1} \end{pmatrix}}_{y_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 2\cdot y_{11} + y_{21} &= 1 & \Rightarrow y_{11} &= \tfrac{1}{2} \\
3\cdot y_{21} + y_{31} &= 0 & \Rightarrow y_{21} &= 0 \\
\vdots \qquad \vdots &\quad \vdots & & \\
3\cdot y_{m1} &= 0 & \Rightarrow y_{m1} &= 0
\end{aligned}$$

Alternativbeweis:

Setze
$$B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 3 \end{pmatrix},\quad u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\quad v := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = B + uv^T$$

Weiter gilt
$$\alpha := 1 + v^T B^{-1} u = \tfrac{2}{3} \neq 0$$

$\overset{(a),\,\alpha\neq 0}{\Longrightarrow}$ A ist invertierbar mit
$$A^{-1} = B^{-1} - \tfrac{1}{\alpha}(B^{-1}uv^TB^{-1})$$
mit
$$B^{-1}_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j+1}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{j-i-1}, & j = i+k,\ i=1,\dots,m,\ k=0,\dots,m-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Insgesamt erhalten wir $A^{-1} = (y_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}}$ mit

$$y_{ij} = \begin{cases} \tfrac{1}{2}, & i=j=1 & =: \alpha \\ \tfrac{1}{2}\cdot(-1)^{j-1}\cdot 3^{-(j-1)}, & i=1\ \&\ 1<j\leq m & =: \beta_{1j} \\ (-1)^{j-i}\cdot 3^{-(j-i+1)}, & 2\leq i\leq j\leq m & =: \gamma_{ij} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\left(\Rightarrow \text{Veranschaulichung:}\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ 0 & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_{mm} \end{pmatrix}\right)$$

zu (iv): Zur Erinnerung:
$$\|A\|_1 := \max_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \quad (\text{Spaltensummennorm})$$

Zur Aufgabe:
$$\|A^{-1}\|_1 = \max\left\{|\alpha|, \max_{j=2,\dots,m}\left\{|\beta_{1j}| + \sum_{i=2}^{j}|\gamma_{ij}|\right\}\right\}$$

Es gilt:
$$|\alpha| = \tfrac{1}{2}$$

und

$$|\beta_{1j}| + \sum_{i=2}^{j} |\gamma_{ij}|$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 3^{-(j-1)} + \sum_{i=2}^{j} 3^{-(j-i+1)}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 3^{-(j-1)} + \sum_{i=0}^{j-2} 3^{-(j-i-1)}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 3^{-(j-1)} + 3^{-(j-1)}\cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{j-2} 3^{i}}_{=\frac{1-3^{j-1}}{1-3}}$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 3^{-(j-1)} - \frac{1}{2}\cdot 3^{-(j-1)}}_{=0} + \frac{1}{2}\cdot \underbrace{3^{-(j-1)}\cdot 3^{j-1}}_{=3^0=1}$$
$$= \frac{1}{2} \qquad \forall j = 2,\dots,m$$

Damit folgt insgesamt
$$\|A^{-1}\|_1 = \frac{1}{2}$$

zu (v):

Banach-Lemma:

① : $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$ invertierbar

② : $\Delta A \in \mathbb{K}^{m\times m}$ mit $\gamma := \|A^{-1}\|\cdot\|\Delta A\| < 1$

$\Rightarrow$ $A+\Delta A$ invertierbar mit $\|(A+\Delta A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\gamma}\|A^{-1}\|$

zu ①: Die Invertierbarkeit von A folgt aus (iii).

zu ②: Für $\Delta A := hE$ (Störungsterm) gilt $(h \geq 0)$
$$\|\Delta A\|_1 = \|hE\|_1 = h\cdot\|E\|_1 = h\cdot \max_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{m} \underbrace{|e_{ij}|}_{\substack{\leq 1 \\ \text{nach Aufgabenstellung}}} \leq h\cdot \max_{j=1,\dots,m} m = m\cdot h$$

Daraus und aus (iv) erhalten wir
$$\gamma := \underbrace{\|A^{-1}\|_1}_{\overset{(iv)}{=}\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\|\Delta A\|_1}_{\substack{\leq m\cdot h \\ \text{Zeile zuvor}}} \leq \frac{m}{2}\cdot h \overset{!}{<} 1 \qquad (26.3)$$

muss als Vor. für das Banach-Lemma erfüllt sein.

$\overset{\text{Banach-Lemma}}{\Rightarrow}$ Falls $\frac{m}{2}\cdot h < 1$ erfüllt ist, so ist $B_h := A + hE$ invertierbar.

zu (vi): Setze $\bar{h} = \frac{2}{m}$, dann gilt (vgl. (26.3))
$$\gamma := \|A^{-1}\|_1\cdot\|\Delta A\|_1 \leq \frac{m}{2}\cdot \underbrace{h}_{<\frac{2}{m}} < 1 \quad \forall h \in \underbrace{[0,\tfrac{2}{m}[}_{\overset{!}{=}\text{halboffen!}} = [0,\bar{h}[$$

(bzw. setze $\bar{h} := \frac{2}{m} - \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gilt
$$\gamma := \|A^{-1}\|_1\cdot\|\Delta A\|_1 \leq \frac{m}{2}\cdot\underbrace{h}_{\leq \frac{2}{m}-\varepsilon} \leq \frac{m}{2}\left(\frac{2}{m}-\varepsilon\right) = \underbrace{1 - \underbrace{\underbrace{\frac{\varepsilon\cdot m}{2}}_{>0}}_{<0}}_{<1} < 1$$
$$\forall h \in \underbrace{[0,\tfrac{2}{m}-\varepsilon]}_{\overset{!}{=}\text{abgeschlossen!}} = [0,\bar{h}]\;)$$

Aufgabe 27:

Zur Wiederholung:

Gesamtschrittverfahren (GSV): $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$

Löse: $Ay = b$

Ansatz: Zerlege $A = M - N$ mit $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ leicht invertierbar
$N \in \mathbb{R}^{m \times m}$ $(N = M - A)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow Ay = b \\
&\Leftrightarrow (M-N)y = b \\
&\Leftrightarrow My = Ny + b \\
&\Leftrightarrow y = M^{-1}Ny + M^{-1}b \qquad \text{(Fixpunktgleichung)}
\end{aligned}$$

Iteration: $y_{n+1} = M^{-1}N y_n + M^{-1}b$, $n = 0, 1, \ldots$
(+ Abbruchkriterium)
y_0 gegeben

GSV: Zerlege $A = D - L - R = \begin{pmatrix} \ddots & & -R \\ & D & \\ -L & & \ddots \end{pmatrix}$, A strikt diagonaldominant!
$\Rightarrow d_{ii} \neq 0 \ \forall i = 1, \ldots, m$

Ansatz: $A = M - N$ mit $M := D$
$N := L + R$

Iteration: $y_{n+1} = D^{-1}(L+R)y_n + D^{-1}b$, $n = 0, 1, \ldots$

! Satz 7.7 sagt aus „wann" und „für welche Anfangswerte" die Fixpunktiteration konvergiert:

$\|D^{-1}(L+R)\| < 1 \Rightarrow (y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert $\forall y_0 \in \mathbb{R}^m$
(gegen die Lösung des LGS's $Ay = b$)

```
function aufgabe27
    m=1200;                               % Dimension des LGS's

    rand('state',3);                      % Zur Erzeugung von Zufallszahlen

    A=3*eye(m)+diag(ones(m-1,1),1);       % Matrix A
    A(1,1)=2;
    hs=[1/1200, 1/9];                     % Groesse der Stoerung
    E=2*rand(m)-ones(m);                  % Stoerungsmatrix
    b=ones(m,1);
    eps=[10^(-6),10^(-12)];

    zeit=zeros(length(hs),5);
    schritte=zeros(length(hs),2);
    fehler=zeros(length(hs),5);

    for i=1:length(hs)
        h=hs(i);
        Bh=A+h*E;

        % ---------------------------
        % |  Aufgabenteil (b) & (d)  |
        % ---------------------------
        fprintf('GSV eps(1)...\n');
        tic; [y1,schritte(i,1)]=GSV(Bh,b,eps(1)); zeit(i,1)=toc;
        fprintf('GSV eps(2)...\n');
        tic; [y2,schritte(i,2)]=GSV(Bh,b,eps(2)); zeit(i,2)=toc;
        % ---------------------------
        % |  Aufgabenteil (c) & (d)  |
        % ---------------------------
        fprintf('LR(o.P.) ...\n');
        tic; [y3,~]=LR(Bh,b,1); zeit(i,3)=toc;
        fprintf('LR(a.P.) ...\n');
        tic; [y4,~]=LR(Bh,b,2); zeit(i,4)=toc;
        fprintf('LR(r.P.) ...\n');
        tic; [y5,~]=LR(Bh,b,3); zeit(i,5)=toc;
        % ---------------------------
        % |  Aufgabenteil (e) & (d)  |
        % ---------------------------
        fprintf('Matlab ...\n');
        tic; yquer=Bh\b; zeit(i,6)=toc;

        fehler(i,1)=norm(y1-yquer,1);
        fehler(i,2)=norm(y2-yquer,1);
        fehler(i,3)=norm(y3-yquer,1);
        fehler(i,4)=norm(y4-yquer,1);
        fehler(i,5)=norm(y5-yquer,1);
    end

    % -------------
    % |  Ausgabe  |
    % -------------
    fprintf('Aufgabe 27: Untersuchung des Verhaltens des iterativen
Gesamtschrittverfahrens\n');
    fprintf
```

```
('-------------------------------------------------------------------------------------------
-\n\n');
    fprintf('           h       Laufzeit      Fehler       eps      schritte\n');
    for i=1:length(hs)
        fprintf('GSV       %5.4f     %7.6f    %4.3e    %1.0e     %7.0f\n',...
                       [hs(i),zeit(i,1),fehler(i,1),eps(1),schritte(i,1)]);
        fprintf('GSV       %5.4f     %7.6f    %4.3e    %1.0e     %7.0f\n',...
                       [hs(i),zeit(i,2),fehler(i,2),eps(2),schritte(i,2)]);
        fprintf('LR(o.P.)  %5.4f     %7.6f    %4.3e\n',...
                       [hs(i),zeit(i,3),fehler(i,3)]);
        fprintf('LR(a.P.)  %5.4f     %7.6f    %4.3e\n',...
                       [hs(i),zeit(i,4),fehler(i,4)]);
        fprintf('LR(r.P.)  %5.4f     %7.6f    %4.3e\n',...
                       [hs(i),zeit(i,5),fehler(i,5)]);
        fprintf('Matlab    %5.4f     %7.6f    \n',...
                       [hs(i),zeit(i,6)]);
    end
end

function [y,iter]=GSV(A,b,eps)
%GSV Gesamtschrittverfahren, ein iteratives Verfahren zum Loesen linearer
%     Gleichungssysteme (mit strikt diagonaldominanter Matrix)
%   A     : quadratische, strikt diagonaldominante Matrix des LGS's
%   b     : rechte Seite des LGS's
%   tol   : Toleranz, Fehlergenauigkeit
%   y     : Loesung des LGS's
%   iter  : Anzahl der Iterationen, bis zum erreichen der Genauigkeit

    % Initialisierung
    [m,~]=size(A);
    fehler=1;
    yn=ones(m,1);
    iter=0;

    % -----------------------------------------
    % |  1. Schritt: Bestimme M=D und N=L+R   |
    % -----------------------------------------
    M=diag(diag(A));
    N=M-A;
    Mi=diag(1./diag(A));
    MiN=Mi*N;

    % -----------------------------------------
    % |  2. Schritt: Bestimme M=D und N=L+R   |
    % -----------------------------------------
    while fehler>eps
        iter=iter+1;   Könnte man einmalig außerhalb der while-Schleife berechnen
        y=MiN*yn+Mi*b;
        fehler=norm(y-yn,1);
        yn=y;
    end
    norm(MiN,inf)
end

function [y,pivot]=LR(A,b,pivot_type)
```

```
%LR LR-Faktorisierung, LR-Zerlegung
%   A           : quadratische Matrix des LGS's
%   b           : rechte Seite des LGS's
%   pivot_type  : Typ der Pivotisierung
%                 1 : ohne Pivotisierung
%                 2 : absolute Spaltenpivotisierung
%                 3 : relative Spaltenpivotisierung
%   y           : Loesung des LGS's
%   pivot       : Werte an den Pivotstellen

    % Initialisierung
    m=length(b);          % Bestimmung der Dimension des LGS's
    y=zeros(m,1);         % Loesung
    r=zeros(1,m);         % Pivotstellen
    tau=zeros(1,m);       % Hilfsvektor
    pivot=zeros(m-1,1);   % Pivotwerte

    % ---------------------
    % |  1. Schritt: PA=LR  |
    % ---------------------
    for k=1:m-1
        % A. Pivotisierung:
        % A.1. ohne Pivotisierung
        if pivot_type==1
            r(k)=k;
            pivot(k)=A(k,k);
        % A.2. absolute Spaltenpivotisierung
        elseif pivot_type==2
            Amax=0;
            for i=k:m
                if abs(A(i,k))>Amax
                    Amax=A(i,k);
                    r(k)=i;
                    pivot(k)=A(i,k);
                end
            end
        % A.3. relative Spaltenpivotisierung
        elseif pivot_type==3
            Amax=0;
            for i=k:m
                si=0;
                for j=k:m
                    si=si+abs(A(i,j));
                end
                if abs(A(i,k))/si>Amax
                    Amax=abs(A(i,k))/si;
                    r(k)=i;
                    pivot(k)=A(i,k);
                end
            end
        end

        % B. Zeilentausch
        if (r(k)~=k)
            tau(1,:)=A(k,:);
```

```
            A(k,:)=A(r(k),:);
            A(r(k),:)=tau(1,:);
        end

        % C. Elementare Zeilenumformung
        for i=k+1:m
            A(i,k)=A(i,k)/A(k,k);
            for j=k+1:m
                A(i,j)=A(i,j)-A(i,k)*A(k,j);
            end
        end
    end

    % ----------------------
    % |  2. Schritt: PB   |
    % ----------------------
    for k=1:m-1
        if(r(k)~=k)
           tau(1,1)=b(k);
           b(k)=b(r(k));
           b(r(k))=tau(1,1);
        end
    end
    %Anmerkung: Pb=b

    % --------------------------
    % |  3. Schritt: Lu=Pb   |
    % --------------------------
    for i=2:m
        for j=1:i-1
            b(i)=b(i)-A(i,j)*b(j);
        end
    end
    %Anmerkung: u=b

    % ------------------------
    % |  4. Schritt: Ry=u   |
    % ------------------------
    for i=m:-1:1
        for j=i+1:m
            b(i)=b(i)-A(i,j)*b(j);
        end
        b(i)=b(i)/A(i,i);
    end

    y(:,1)=b;
end
```

Aufgabe 27: Untersuchung des Verhaltens des iterativen Gesamtschrittverfahrens

	h	Laufzeit	Fehler	eps	schritte	||M^(-1)N||_{inf}
GSV	0.0008	0.385204	2.492e-07	1e-06	20	0.7456
GSV	0.0008	0.463404	5.740e-13	1e-12	33	0.7456
LR(o.P.)	0.0008	25.886426	5.688e-13			
LR(a.P.)	0.0008	25.899552	5.688e-13			
LR(r.P.)	0.0008	36.485767	5.688e-13			
Matlab	0.0008	0.138876				
GSV	0.1111	0.747051	5.942e-07	1e-06	100	33.1854
GSV	0.1111	1.098742	1.190e-12	1e-12	175	33.1854
LR(o.P.)	0.1111	25.875188	1.309e-12			
LR(a.P.)	0.1111	25.884837	1.309e-12			
LR(r.P.)	0.1111	41.728377	1.309e-12			
Matlab	0.1111	0.148183				

zu(f):

1. Ein Vorteil des GSV's gegenüber des LR-Verfahrens liegt (trotz der relativ schlechten – linearen – Konvergenzordnung) in der relativ schnellen Laufzeit.
2. Der Fehler des GSV's ist nur so gut wie das vorgegebene Abbruchkriterium.
3. Die Laufzeit des GSV's erhöht sich zunehmend je niedriger die Toleranz ε gesetzt wird. Dies gilt ebenso für die Anzahl der benötigten Schritte (anstelle der Laufzeit).
4. Die Laufzeit erhöht sich ebenfalls sehr stark, wenn man in den Fall kommt, bei dem die Matrix A nicht mehr diagonal dominant ist ($h = \frac{1}{9}$).
5. $h = \frac{1}{1200} \Rightarrow \|M^{-1}N\|_\infty = 0.7456 < 1 \underset{\text{Satz 7.7}}{\Rightarrow} (y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert $\forall y_0 \in \mathbb{R}^m$

   $h = \frac{1}{9} \Rightarrow \|M^{-1}N\|_\infty = 33.1854 \not< 1 \Rightarrow$ Satz 7.7 liefert uns keine Aussage über die Konvergenz
6. Die Matlab-Routine ist was die Laufzeit betrifft im Vergleich zu den anderen Varianten am schnellsten.

AUFGABE 28:

zu (a): Für $x=(w,\alpha)^T\in\mathbb{K}^{m+1}$ mit $w\in\mathbb{K}^m$ und $\alpha\in\mathbb{K}$ beliebig gilt

$$\tilde{A}x=0 \iff \begin{pmatrix} A & u \\ v^T & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w \\ \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff Aw+\alpha u=0 \quad \text{und} \quad v^Tw=0$$

$$\overset{\text{A inv.}\Rightarrow\exists A^{-1}}{\iff} w+\alpha\cdot A^{-1}u=0 \quad \text{und} \quad v^Tw=0$$

$$\iff w=-\alpha A^{-1}u \quad \text{und} \quad v^Tw=0$$

$$\iff \text{I}\; w=-\alpha A^{-1}u \quad \text{und} \quad \text{II}\; -\alpha v^TA^{-1}u=0$$

„(i) ⟸ (ii)": Sei $v^T\cdot A^{-1}\cdot u\neq 0$, dann folgt wegen II, dass $\alpha=0$ gelten muss. Dies eingesetzt in I liefert $w=0$. Damit gilt

$$\tilde{A}x=0 \iff x:=\begin{pmatrix}w\\\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Damit ist der Kern von $\tilde{A}$ trivial und $\tilde{A}$ somit invertierbar.

„(i) ⟹ (ii)": Angenommen es gilt $v^TA^{-1}u=0$. Dann sind I und II z.B. mit $\alpha=1$ erfüllt und liefern

$$\tilde{A}\cdot\begin{pmatrix}-A^{-1}u\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

also eine nichttriviale Lösung der homogenen Gleichung $\tilde{A}x=0$. Damit ist $\tilde{A}$ nicht invertierbar. ↯ zu $v^TA^{-1}u=0$. Also folgt $v^TA^{-1}u\neq0$.

zu (b): zu (iii): Motivation:

$$\tilde{A}x=b \iff \begin{pmatrix}A & u\\ v^T & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}w\\\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\\beta\end{pmatrix} \quad, w,c\in\mathbb{K}^m \;,\; \alpha,\beta\in\mathbb{K}$$

$$\iff Aw+\alpha u=c \quad\text{und}\quad v^Tw=\beta$$

$$\iff Aw=c-\alpha u \quad\text{und}\quad v^Tw=\beta$$

Sei nun y Lösung von $Ay=c$
und z Lösung von $Az=u$

$$\iff Aw=A(y-\alpha z) \quad\text{und}\quad v^Tw=\beta$$

$$\iff w=y-\alpha z \quad\text{und}\quad v^Tw=\beta$$

$$\overset{\text{einsetzen}}{\iff} w=y-\alpha z \quad\text{und}\quad v^Ty-\alpha v^Tz=\beta$$

$$\iff w=y-\alpha z \quad\text{und}\quad \alpha=\frac{v^Ty-\beta}{v^Tz}$$

Dies motiviert den folgenden Algorithmus:

Algorithmus:

Auflösung mit L
Auflösung mit R (Abs. 7.4)

1. Bestimme y mit $Ay=c$ $\left(m^2=\frac{m^2}{2}+\frac{m^2}{2}\right)$
   z mit $Az=u$ $\left(m^2=\frac{m^2}{2}+\frac{m^2}{2}\right)$
2. Bestimme $\alpha_1:=v^Ty$ (m)
   $\alpha_2:=v^Tz$ (m)
   $\alpha:=\frac{\alpha_1-\beta}{\alpha_2}$ (1)
3. Bestimme $w:=y-\alpha z$ (m)

zu (iv): Im Algorithmus stehen in jedem Schritt (in Klammern) die Anzahl der notwendigen Multiplikationen, insofern A bereits LR-zerlegt ist. Insgesamt ergibt sich daher ein Aufwand von

$$m^2+m^2+m+m+1+m = 2m^2+3m+1 \sim 2m^2$$

Aufgabe 28

Alternativlösung zu (a):

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & u \\ v^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & u \\ v^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}u \\ v^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\tilde{A}) = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} I & A^{-1}u \\ v^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\det(A)}_{\neq 0 \text{ (da } A \text{ invertierbar)}} \cdot \det(-v^T A^{-1} u)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\det(\tilde{A}) \neq 0}_{\Leftrightarrow \tilde{A} \text{ invertierbar}} \Leftrightarrow \underbrace{\det(-v^T A^{-1} u) \neq 0}_{\Leftrightarrow -v^T A^{-1} u \neq 0}$$