Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 11
24.06.2010

Abgabe: Donnerstag, 01.07.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 29: (Kontraktionssatz)
Bestimmen Sie ein geeignetes Intervall D der angegebenen Form, so dass die Voraussetzungen des Kontraktionssatzes für die Fixpunktgleichung

$$x = F(x), \quad x \in D$$

erfüllt sind.

(a) $F(x) = \ln(x) + 2, \ D = [a, 5]$,

(b) $F(x) = \beta \cos^2(x), \ D = [0, a]$ und $\beta \in (0, 1)$,

(c) $F(x) = \operatorname{sech}(x), \ D = [0, a]$.

Zeigen Sie zusätzlich in den Fällen (b) und (c), dass die Iteration $x_{n+1} = F(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dafür überlege man sich, dass diese Iteration nach wenigen Schritten in D landet.

(6 Punkte)

Aufgabe 30: (Fixpunkt-Berechnung, graphische Iteration)
Es seien die folgenden reellen Funktionen gegeben:

(a) $f(x) = \cos(x) + x$,

(b) $f(x) = -x^2 + x + 1$.

(1) Bestimmen Sie die Anzahl der Fixpunkte von f.

(2) Skizzieren Sie für einige charakteristische Startwerte x_0 das Verhalten der Iteration

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

mit Hilfe des Graphen von f.

(3) Ein Fixpunkt $\bar{x}$ von $f : \mathbb{R} \subset D \to \mathbb{R}$ heißt **anziehend**, falls es ein Intervall $I = I(\bar{x}) \subset D$ gibt, so dass die Iterationsfolge (1) für $n \to \infty$ und für alle Startwerte $x_0 \in I$ gegen $\bar{x}$ konvergiert. Das maximale Intervall I mit dieser Eigenschaft nennen wir den **Einzugsbereich** des Fixpunktes $\bar{x}$ von f.

Bestimmen Sie für f aus (a) und (b) die Einzugsbereiche der anziehenden Fixpunkte.

Hinweis: Vergleichen Sie Ihre Resultate mit der NUMLAB-GUI: *Stair Case*.

(6 Punkte)

Aufgabe 31: (Intervallhalbierung, Sekanten-Verfahren, Newton-Verfahren)
Es sei die Gleichung

$$\tanh(x) = \frac{1}{2} + \lambda x, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

mit $\lambda \in \{0.1, 0.5\}$ gegeben.

(a) Ermitteln Sie zunächst per Hand die Anzahl der Lösungen sowie geeignete Startwerte für die Intervallhalbierung.

(b) Implementieren Sie die Intervallhalbierung, das Sekanten-Verfahren und das Newton-Verfahren. Hierbei soll die Iteration abbrechen, wenn der Defekt (d. h. der Betrag des Fehlers, der sich nach Einsetzen in (2) ergibt) kleiner als 10^{-10} ist.

(c) Berechnen Sie mit der Methode der Intervallhalbierung und den Startwerten aus (a) die jeweiligen Nullstellen.

(d) Verwenden Sie die gleichen Startwerte wie in (c) zur Berechnung der Nullstellen mittels des Sekanten-Verfahrens.

(e) Berechnen Sie zuletzt die Newton-Folgen gestartet an den jeweiligen Intervallgrenzen.

(f) Geben Sie für alle drei Verfahren die Iterationsfolgen aus.

Hinweis: Vergleichen Sie Ihre Resultate mit der NUMLAB-GUI: *Nullstellen 1D*.
Die Intervallhalbierung ist in der GUI nicht implementiert.

(6 Punkte)

Aufgabe 29: (Kontraktionssatz)

Kontraktionssatz: Gegeben sei

$D \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen

$F : D \to \mathbb{R}^m$

$F(D) \subset D$

$\exists L \in [0,1[: \|F(x) - F(y)\| \leq L \cdot \|x-y\| \quad \forall x,y \in D$

$\Rightarrow \exists_1 \bar{x} \in D : F(\bar{x}) = \bar{x}$

zu (a): $D := [a,5] \subset \mathbb{R}$ (d.h. $m=1$),

$F : [a,5] \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) := \ln(x) + 2$

①: z.z.: $F([a,5]) \subset [a,5]$, d.h. $a \leq F(x) \leq 5 \quad \forall x \in [a,5]$

Da $F(x)$ in 0 unstetig ist, folgt zunächst $a > 0$ (da F ansonsten nicht auf ganz D definiert ist). Da F auf $\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ streng monoton wachsend ist, folgt

$$a \overset{!}{\leq} \ln(a) + 2 \underset{\text{Def. von } F}{=} F(a) \underset{F \text{ auf } [a,5] \text{ streng mon. wachsend}}{\leq} F(x) \leq F(5) \underset{\text{Def. von } F}{=} \ln(5) + 2 \overset{!}{\leq} 5 \quad \forall x \in [a,5]$$

Damit muss a die folgenden zwei Bedingungen erfüllen:

1. $a \leq \ln(a) + 2$
2. $\ln(5) + 2 \leq 5$

Die 2. Bedingung ist stets erfüllt ($\ln(5) + 2 \approx 3.609437912 \leq 5$). Für die 1. Bedingung erhalten wir

$$a \leq \ln(a) + 2 \Rightarrow a \in \left]\exp\left(-\text{lambertW}\left(-\tfrac{1}{e^2}\right) - 2\right), \exp\left(-\text{LambertW}\left(-1, -\tfrac{1}{e^2}\right) - 2\right)\right[$$
$$\approx]0.1585943396,\ 3.146193222[$$

②: z.z.: $\exists L \in [0,1[: \|F(x) - F(y)\| \leq L \cdot \|x-y\| \quad \forall x,y \in [a,5]$

Setze $L := \frac{1}{a}$, dann gilt

$$\|F(x) - F(y)\| \underset{\text{HDI}}{=} \left\| \int_y^x F'(s)\,ds \right\| \leq \|x-y\| \cdot \max_{s \in [x,y]} \|F'(s)\|$$

(HDI: Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung)

$$\leq \underbrace{\|x-y\| \cdot \max_{s \in [a,5]} \underbrace{\|F'(s)\|}_{= \frac{1}{s} \text{ streng mon. fallend}}}_{= \frac{1}{a}} = \frac{1}{a} \cdot \|x-y\| =: L \cdot \|x-y\| \quad \forall x,y \in [a,5]$$

Um $L := \frac{1}{a} < 1$ zu gewährleisten, muss $a > 1$ gelten. Damit sind die Voraussetzungen des Kontraktionssatzes für $D := [a,5] \ \forall a \in]1, 3.146193222[$ erfüllt.

zu (b): $D := [0,a] \subset \mathbb{R}$ (d.h. $m=1$)

$F : [0,a] \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) := \beta \cdot \cos^2(x)$ mit $\beta \in]0,1[$

①: z.z.: $F([0,a]) \subset [0,a]$, d.h. $0 \leq F(x) \leq a \quad \forall x \in [0,a]$

Da $F(0) = 1$ ist und insbesondere $1 = F(0) \in [0,a]$ erfüllt sein muss, erhalten wir $a \geq 1$. Da $F(\mathbb{R}_+) = [0,1]$ ist, kann $a \geq 1$ beliebig gewählt werden um

$$\mathcal{F}([0,a]) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+) = [0,1] \underset{\substack{\uparrow\\ a\geq 1}}{\subset} [0,a]$$

zu gewährleisten.

②: z.z.: $\exists L \in [0,1[: \|\mathcal{F}(x)-\mathcal{F}(y)\| \leq L \cdot \|x-y\| \quad \forall x,y \in [0,a]$

Setze $L := |\beta| = \beta$, dann gilt

$$\|\mathcal{F}(x)-\mathcal{F}(y)\| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{HDI}}}{=} \left\| \int_y^x \mathcal{F}'(s)\,ds \right\| \leq \|x-y\| \cdot |\beta| \cdot \max_{s\in[x,y]} \left\| \frac{d}{ds}\cos^2(s) \right\|$$

$$\leq \|x-y\| \cdot |\beta| \cdot \underbrace{\max_{s\in[0,a]} \|-2\cos(s)\cdot\sin(s)\|}_{=1 \ (\text{da } a\geq 1 \ !!)}$$

$$= |\beta| \cdot \|x-y\| =: L \cdot \|x-y\| \quad \forall x,y \in [0,a]$$

Da $\beta \in]0,1[$, gilt für die Lipschitz-Konstante L insbesondere $L<1$.
(Beachte: Für $\beta \geq 1$ ist die Bedingung ① weiterhin erfüllt. Auch die Lipschitz-Stetigkeit aus ② ist erfüllt, jedoch nur mit $L \geq 1$, d.h. $\mathcal{F}$ beschreibt keine Kontraktion und somit ist der Kontraktionssatz nicht anwendbar.) Damit sind die Voraussetzungen des Kontraktionssatzes für $D := [0,a]$ $\forall a \geq 1$ erfüllt.

<u>zu (c):</u> $D := [0,a] \subset \mathbb{R}$ (d.h. $m=1$)

$\mathcal{F} : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\mathcal{F}(x) := \operatorname{sech}(x) \left(= \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \right)$

①: z.z.: $\mathcal{F}([0,a]) \subset [0,a]$, d.h. $0 \leq \mathcal{F}(x) \leq a \quad \forall x \in [0,a]$

Da $\mathcal{F}(0) = 1$ ist und insbesondere $1 = \mathcal{F}(0) \in [0,a]$ erfüllt sein muss, erhalten wir $a \geq 1$. Da $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+) =]0,1]$ ist, kann $a \geq 1$ beliebig gewählt werden, um

$$\mathcal{F}([0,a]) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+) =]0,1] \underset{\substack{\uparrow\\ a\geq 1}}{\subset} [0,a]$$

zu gewährleisten.

②: z.z.: $\exists L \in [0,1[: \|\mathcal{F}(x)-\mathcal{F}(y)\| \leq L \cdot \|x-y\| \quad \forall x,y \in [0,a]$

Setze $L := \frac{1}{2}$, dann gilt

$$\|\mathcal{F}(x)-\mathcal{F}(y)\| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{HDI}}}{=} \left\| \int_y^x \mathcal{F}'(s)\,ds \right\| \leq \|x-y\| \cdot \max_{s\in[x,y]} \left\| \frac{d}{ds}\operatorname{sech}(s) \right\|$$

$$\leq \|x-y\| \cdot \underbrace{\max_{s\in[0,a]} \|-\operatorname{sech}(x)\cdot\tanh(x)\|}_{=\frac{1}{2} \ (\text{da } a\geq 1 \ !!)}$$

$$= \frac{1}{2} \|x-y\| =: L \cdot \|x-y\| \quad \forall x,y \in [0,a]$$

Insbesondere haben wir $L = \frac{1}{2} < 1$. Damit sind die Voraussetzungen des Kontraktionssatzes für $D := [0,a]$ $\forall a \geq 1$ erfüllt.

<u>zur Zusatzfrage:</u>

<u>zu (b):</u> Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, dann gilt

$$x_1 = \mathcal{F}(x_0) = \beta \cdot \underbrace{\cos^2(x_0)}_{\in[0,1]} \in [0,\beta] \underset{\substack{\uparrow\\ \beta\in]0,1[}}{\subset} [0,1] \underset{\substack{\uparrow\\ a\geq 1}}{\subset} [0,a] = D$$

$\Rightarrow x_1 \in D$. Die Konvergenz

$$x_{n+1} \longrightarrow \bar{x} \quad \text{für } n \to \infty, \quad x_{n+1} = \beta \cdot \cos^2(x_n)$$

folgt nun aus dem Kontraktionssatz (mit Startwert $x_1 \in D$).

zu (c): Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, dann gilt

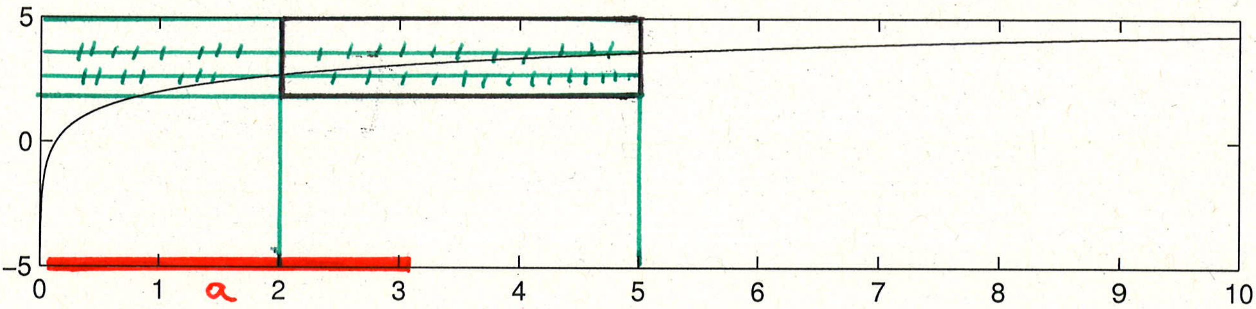
$$x_1 = F(x_0) = \operatorname{sech}(x_0) \in [0,1] \underset{\underset{a \geq 1}{\uparrow}}{\subseteq} [0,a] = D$$

$\Rightarrow x_1 \in D$. Die Konvergenz

$$x_{n+1} \longrightarrow \bar{x} \text{ für } n \to \infty \quad , \quad x_{n+1} = \operatorname{sech}(x_n)$$

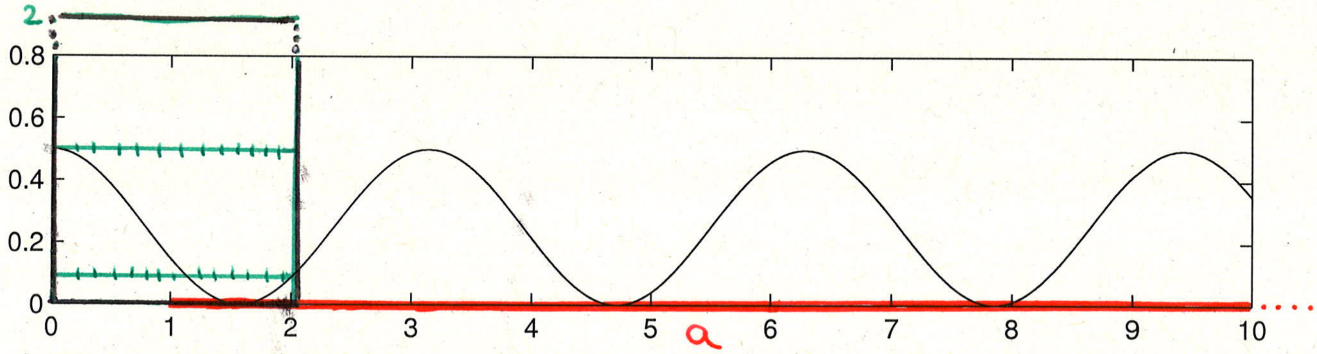
folgt nun erneut aus dem Kontraktionssatz (mit Startwert $x_1 \in D$)

(a)

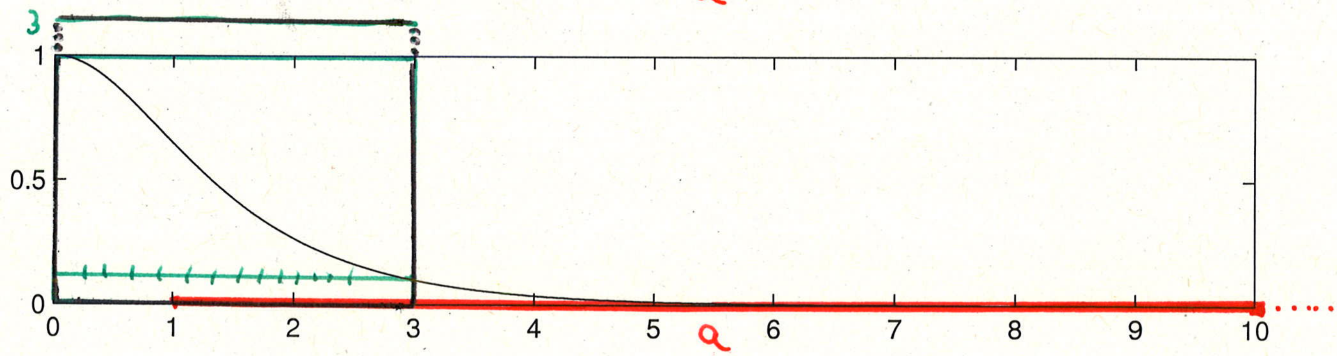


(b)

mit $\beta = \frac{1}{2}$



(c)



Aufgabe 30: (Fixpunkt-Berechnung, graphische Iteration)

zu (1): zu (a): $f(x) = \cos(x) + x$

Behauptung: f besitzt unendlich viele Fixpunkte!

Beweis:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \bar{x} \text{ Fixpunkt} \\ \text{von } f}}{\bar{x} \overset{!}{=} f(\bar{x})} = \cos(\bar{x}) + \bar{x} \underset{-\bar{x}}{\iff} \cos(\bar{x}) = 0$$

$$\iff \boxed{\bar{x} \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}}$$

Damit enthält die Menge $\{\frac{\pi}{2} + \pi \cdot m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ unendlich viele Fixpunkte

zu (b): $f(x) = -x^2 + x + 1$

Behauptung: f besitzt genau zwei Fixpunkte!

Beweis:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \bar{x} \text{ Fixpunkt} \\ \text{von } f}}{\bar{x} \overset{!}{=} f(\bar{x})} = -\bar{x}^2 + \bar{x} + 1 \underset{-\bar{x}}{\iff} 0 = \bar{x}^2 - 1$$

$$\iff \bar{x}^2 = 1$$

$$\iff \boxed{\bar{x} = \pm 1}$$

Damit enthält die Menge $\{-1, 1\}$ genau zwei Fixpunkte.

zu (2): siehe Plots (mit der NUMLAB-GUI) „Stair case".

zu (3): zu (a):

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi \text{ ist } \begin{cases} \text{anziehend}, & m \text{ gerade} \\ \text{abstoßend}, & m \text{ ungerade} \end{cases}} \to \text{mit Einzugsbereich } \left]\frac{\pi}{2} + (m-1)\pi, \frac{\pi}{2} + (m+1)\pi\right[$$

siehe nächste Seite!

~~1. Fall: (m gerade)~~

$$I = I(\bar{x}) := \left]\frac{\pi}{2} + (m-1)\pi, \frac{\pi}{2} + (m+1)\pi\right[$$

$$= \left]\frac{\pi}{2} + (m-1)\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi\right[\cup \left\{\frac{\pi}{2} + m\pi\right\} \cup \left]\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + (m+1)\pi\right[$$

$$=: I_L(\bar{x}) \cup \{\bar{x}\} \cup I_R(\bar{x})$$

1. Fall: $(x_0 \in I_L(\bar{x}))$

- $x_{n+1} = f(x_n)$ streng mon. wachsend
- x_{n+1} nach oben beschränkt

streng monoton wachsend:

$\cos(x) > 0 \quad \forall x \in I_L(\bar{x})$

$\iff f(x) = \cos(x) + x > x \quad \forall x \in I_L(\bar{x})$

$\iff x_{n+1} = f(x_n) > x_n \quad \forall x_n \in I_L(\bar{x})$

x_{n+1} beschränkt durch $\bar{x}$

2. Fall: $(x_0 \in I_R(\bar{x}))$

- $x_{n+1} = f(x_n)$ streng mon. fallend
- x_{n+1} nach unten beschränkt

streng monoton fallend

$\cos(x) < 0 \quad \forall x \in I_R(\bar{x})$

$\iff f(x) = \cos(x) + x < x \quad \forall x \in I_R(\bar{x})$

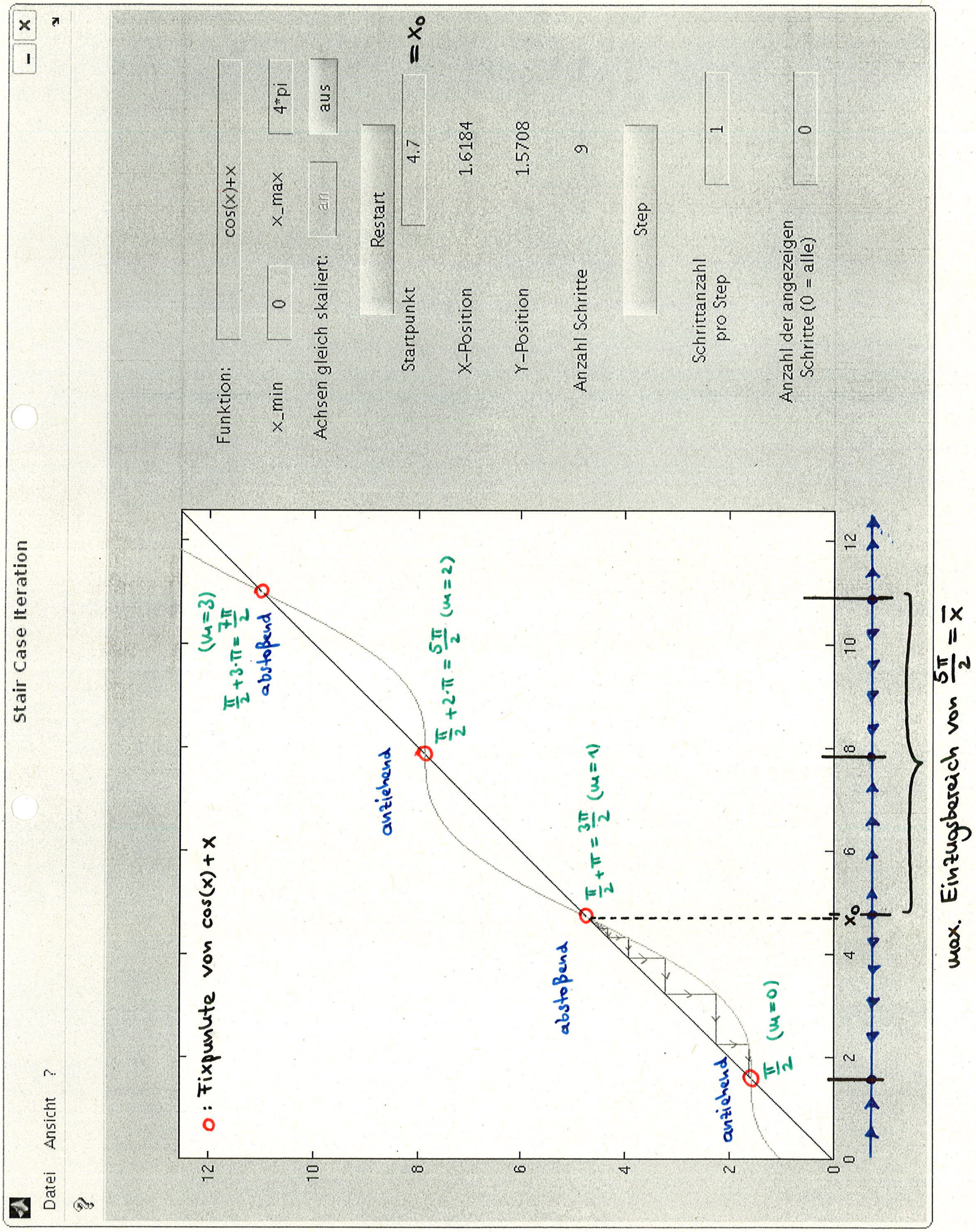
$\iff x_{n+1} = f(x_n) < x_n \quad \forall x_n \in I_L(\bar{x})$

x_{n+1} beschränkt durch $\bar{x}$

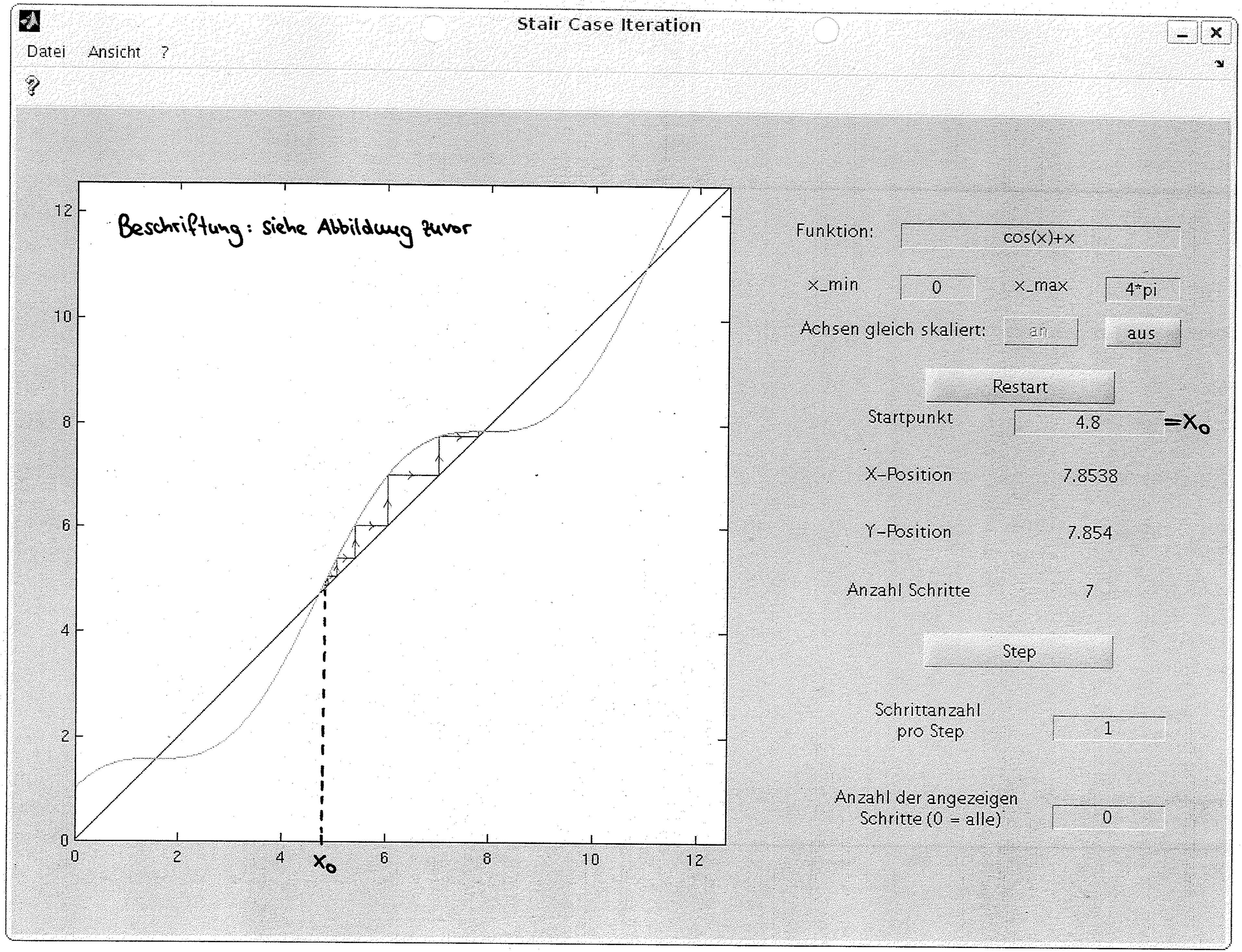
zu (b):

$$\boxed{\begin{aligned} &\bar{x} = -1 \text{ ist abstoßend} \\ &\bar{x} = 1 \text{ ist anziehend mit Einzugsbereich }]-1, 2[\end{aligned}}$$

zu (2): zu (a):

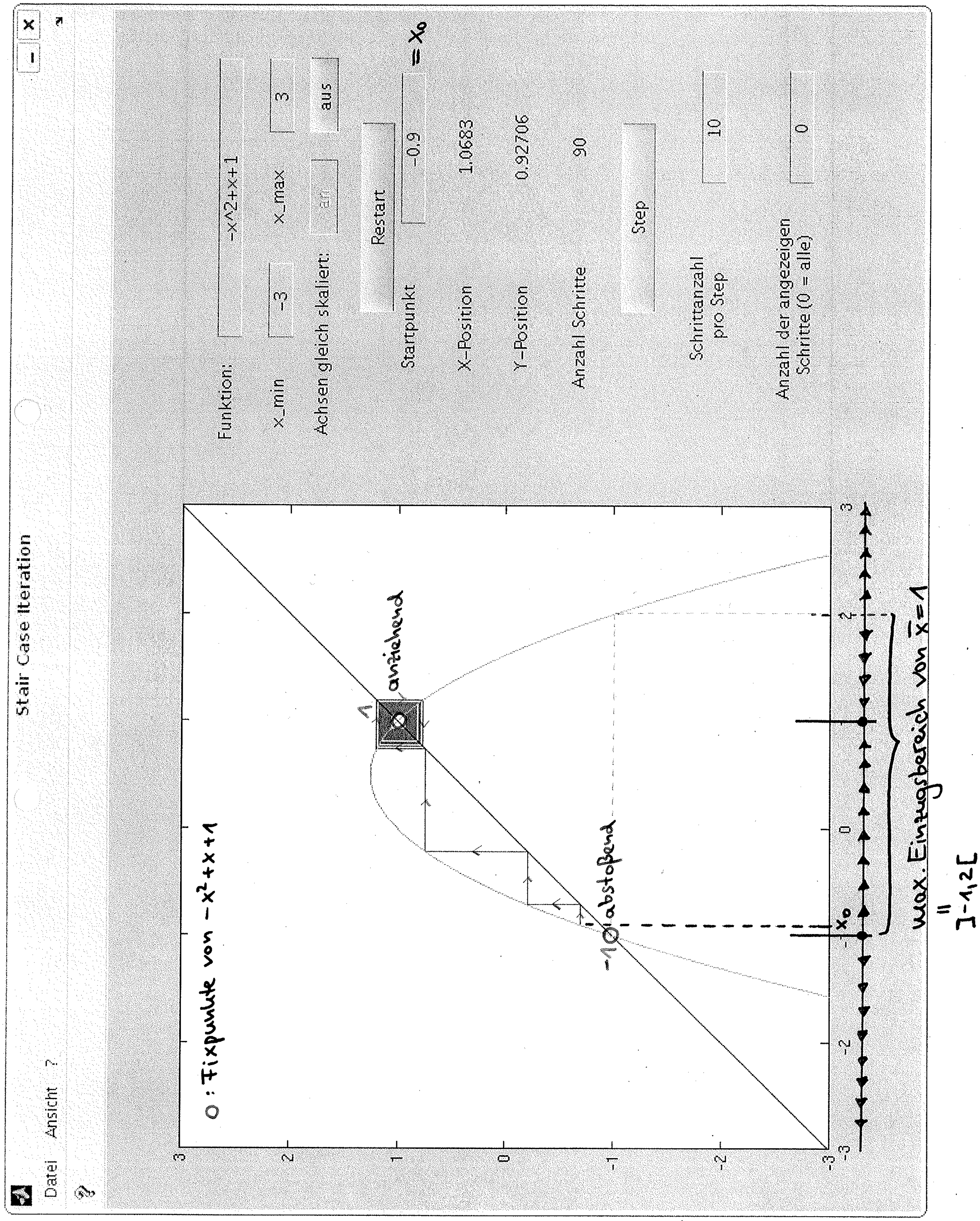


Stair Case Iteration
Datei
Ansicht
?
Funktion:
cos(x)+x
x_min
0
x_max
4*pi
Achsen gleich skaliert:
an
aus
Restart
Startpunkt
4.7
$= x_0$
X-Position
1.6184
Y-Position
1.5708
Anzahl Schritte
9
Step
Schrittanzahl pro Step
1
Anzahl der angezeigen Schritte (0 = alle)
0
o : Fixpunkte von cos(x) + x
anziehend
abstoßend
anziehend
abstoßend
$\frac{\pi}{2}$ (n=0)
$\frac{\pi}{2}+\pi = \frac{3\pi}{2}$ (n=1)
$\frac{\pi}{2}+2\cdot\pi = \frac{5\pi}{2}$ (n=2)
$\frac{\pi}{2}+3\cdot\pi = \frac{7\pi}{2}$ (n=3)
x_0
0
2
4
6
8
10
12
max. Einzugsbereich von $\frac{5\pi}{2} = \bar{x}$

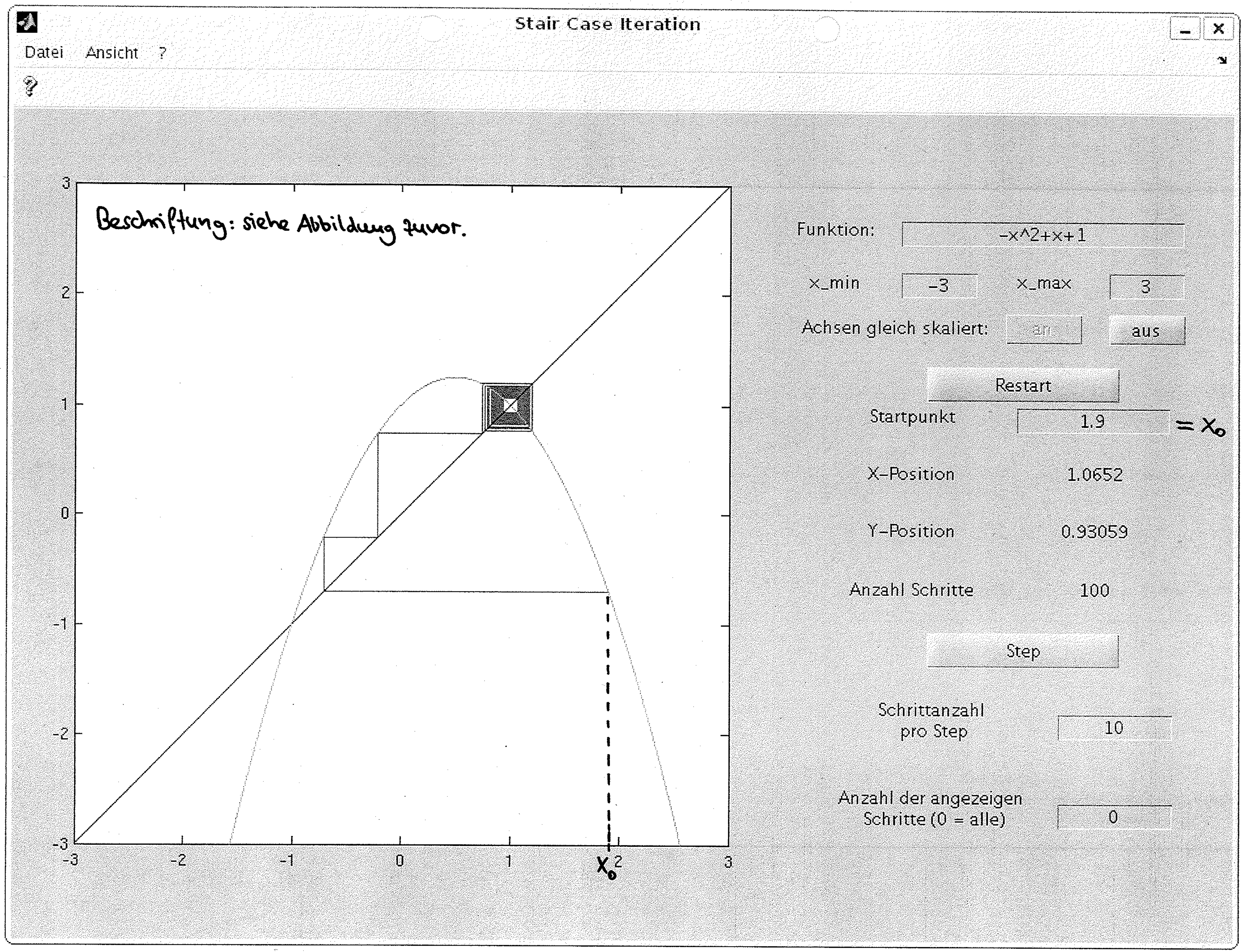


Stair Case Iteration
Datei
Ansicht
?
Beschriftung: siehe Abbildung zuvor
Funktion:
cos(x)+x
x_min
0
x_max
4*pi
Achsen gleich skaliert:
an
aus
Restart
Startpunkt
4.8
=X0
X-Position
7.8538
Y-Position
7.854
Anzahl Schritte
7
Step
Schrittanzahl pro Step
1
Anzahl der angezeigen Schritte (0 = alle)
0
x0
0
2
4
6
8
10
12

zu(2): zu(b):



Stair Case Iteration
Datei
Ansicht
?
Funktion:
-x^2+x+1
x_min
-3
x_max
3
Achsen gleich skaliert:
an
aus
Restart
Startpunkt
-0.9
$= x_0$
X-Position
1.0683
Y-Position
0.92706
Anzahl Schritte
90
Step
Schrittanzahl pro Step
10
Anzahl der angezeigen Schritte (0 = alle)
0
○ : Fixpunkte von $-x^2+x+1$
anziehend
abstoßend
1
-1
x_0
max. Einzugsbereich von $\bar{x}=1$
$=]-1,2[$


Stair Case Iteration
Datei
Ansicht
?
Beschriftung: siehe Abbildung zuvor.
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3
x_0
Funktion:
-x^2+x+1
x_min
-3
x_max
3
Achsen gleich skaliert:
an
aus
Restart
Startpunkt
1.9
$= x_0$
X-Position
1.0652
Y-Position
0.93059
Anzahl Schritte
100
Step
Schrittanzahl
pro Step
10
Anzahl der angezeigen
Schritte (0 = alle)
0

zu (3): zu (a): Vorgehensweise: (siehe Abbildung zur Veranschaulichung)

1. Kontraktionssatz anwenden & dabei ein geeignetes Intervall I bestimmen.
2. Zeige, dass wenn man in $I_{max} \setminus I$ startet nach endlich vielen Schritten in I landet.

1. Fall: (m gerade)

Wegen der 2π-Periodizität des cos genügt es den Spezialfall $\bar{x} = \frac{\pi}{2}$ (mit $m=0$) zu betrachten.

zu 1. $I := [0+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt:

Beweis über Kurvendiskussion $\} \rightarrow$ ①: z.z.: $f(I) \subset I$, d.h. $0+\varepsilon \leq f(x) \leq \pi - \varepsilon \ \forall x \in [0+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$

②: z.z.: $\exists L \in [0,1[: \|f(x)-f(y)\| \leq L \cdot \|x-y\| \ \forall x,y \in [0+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$

Beweis von ②:

$$\|f(x)-f(y)\| = \|\int_y^x f'(s)\,ds\| \leq \|x-y\| \cdot \max_{s\in[x,y]} \|f'(s)\|$$

$$\leq \|x-y\| \cdot \underbrace{\max_{s\in[0+\varepsilon,\pi-\varepsilon]} \|f'(s)\|}_{=:L} = L \cdot \|x-y\|$$

Hierbei gilt $L < 1$, denn

$0 < \sin(s) \leq 1 \quad \forall s \in I \Rightarrow 0 > -\sin(s) \geq -1 \quad \forall s \in I$

$\Rightarrow 1 > -\sin(s)+1 \geq 0 \quad \forall s \in I$

$\Rightarrow L := \max_{s\in I} \|-\sin(s)+1\| < 1$

(beachte: $L = L(\varepsilon)$)

$\xRightarrow{\text{Kontraktionssatz}} \exists_1 \bar{x} \ (\overset{!}{=} \frac{\pi}{2}) \in I : f(\bar{x}) = \bar{x}$. Weiters gilt $\forall x_0 \in I$, dass die Folge $x_{n+1} := f(x_n)$ gegen $\bar{x}$ konvergiert.

($\Rightarrow I \subset EB$ (Einzugsbereich))

zu 2. 1. Fall: $x_0 \in I_L(\bar{x}) :=]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Zunächst einmal gilt, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist, denn:

$\cos(x) > 0 \ \forall x \in I_L(\bar{x}) \Leftrightarrow f(x) = \cos(x) + x > x \quad \forall x \in I_L(\bar{x})$

$\Leftrightarrow x_{n+1} = f(x_n) > x_n \quad \forall x_n \in I_L(\bar{x})$

Nun zeigen wir noch, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n \in I$ gilt:

$$f(x) = \underbrace{\cos(x)}_{\leq 1} + x \leq 1 + x \quad \forall x \in I_L(\bar{x})$$

$\Rightarrow x_{n+1} = f(x_n) \leq 1 + x_n \quad \forall x_n \in I_L(\bar{x})$

Da das Intervall $I(\bar{x})$ die Länge $\pi - \varepsilon - (0+\varepsilon) = \pi - 2\varepsilon \overset{!}{>} 1$ besitzt gibt es ein n mit $x_{n+1} \in I$. Nun wähle $\tilde{x}_0 := x_{n+1} \in I$, so konvergiert die Folge nach dem Kontraktionssatz (siehe 1.)

2. Fall: $x_0 \in I_R(\bar{x}) :=]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

Zunächst gilt, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend ist, denn:

$$\cos(x)<0 \quad \forall x\in I_R(\bar{x}) \Leftrightarrow f(x)=\cos(x)+x<x \quad \forall x\in I_R(\bar{x})$$
$$\Leftrightarrow x_{n+1}=f(x_n)<x_n \quad \forall x_n\in I_R(\bar{x})$$

Nun zeigen wir noch, dass es ein $n\in\mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n\in I$ gilt

$$f(x)=\underbrace{\cos(x)}_{\geq -1 \ \forall x\in I_R(\bar{x})}+x \geq -1+x \quad \forall x\in I_R(\bar{x})$$

$$\Rightarrow x_{n+1}=f(x_n)\geq x_n-1 \quad \forall x_n\in I_R(\bar{x})$$

Da das Intervall $I(\bar{x})$ die länge $\pi-2\varepsilon>1$ besitzt, gibt es ein n mit $x_{n+1}\in I$. Nun wähle $\tilde{x}_0:=x_{n+1}\overset{!}{\in} I$, so konvergiert die Folge nach dem Kontraktionssatz (siehe 1.)

Da in $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ zwei weitere Fixpunkte liegen, ist I der maximale zusammenhängende Einzugsbereich von $\bar{x}=\frac{\pi}{2}$. Wegen der 2π-Periodizität des Kosinus, ist I sogar der maximale Einzugsbereich von $\bar{x}=\frac{\pi}{2}$ auf $\mathbb{R}$.

2. Fall: (m ungerade)

Wegen der Einzugsbereiche für gerade m, kann es für ungerade m keine nichttrivialen Einzugsbereiche geben. Folglich sind die Fixpunkte $\bar{x}$ für ungerade m abstoßend.

zu (b): Wir zeigen zunächst, dass der Einzugsbereich für $\bar{x}=1$ in $]-1,2[$ liegen muss, da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $x_0\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]2,+\infty[$ gegen $-\infty$ konvergiert.

1. Fall: $x_n\in\,]-\infty,-1[$

$$x_n<-1 \Rightarrow x_n^2>1 \Rightarrow -x_n^2<-1$$

$$\Rightarrow x_{n+1}=f(x_n)=\underbrace{-x_n^2}_{<-1}+x_n+1<x_n$$

Da in $]-\infty,-1[$ kein weiteres Fixpunkt von f liegt, muss $\lim_{n\to\infty} x_n=-\infty$ gelten.

~~2. Fall: $x_n\in\,]2,+\infty[$~~

~~$x_n>2 \Rightarrow x_n^2>4 \Rightarrow -x_n^2<-4$~~

~~$\Rightarrow x_{n+1}=f(x_n)=\underbrace{-x_n^2}_{<-4}+x_n+1<x_n-3<x_n$~~

2. Fall: $x_0\in\,]-\infty,-1[$

In diesem Fall ist $x_1\in\,]-\infty,-1[$ und wir befinden uns wieder in Fall 1.

3. Fall: $x_0\in\{-1,2\}$. Dies ist das größtmögliche Einzugsbereich von $\bar{x}=-1$.

~~Der Einzugsbereich von $\bar{x}=-1$ ist durch die Men.~~

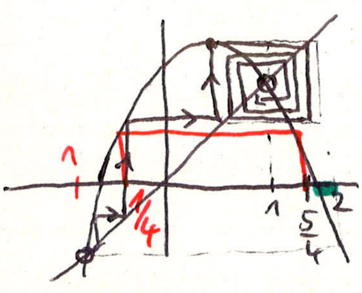
4. Fall: von $\bar{x}=1$

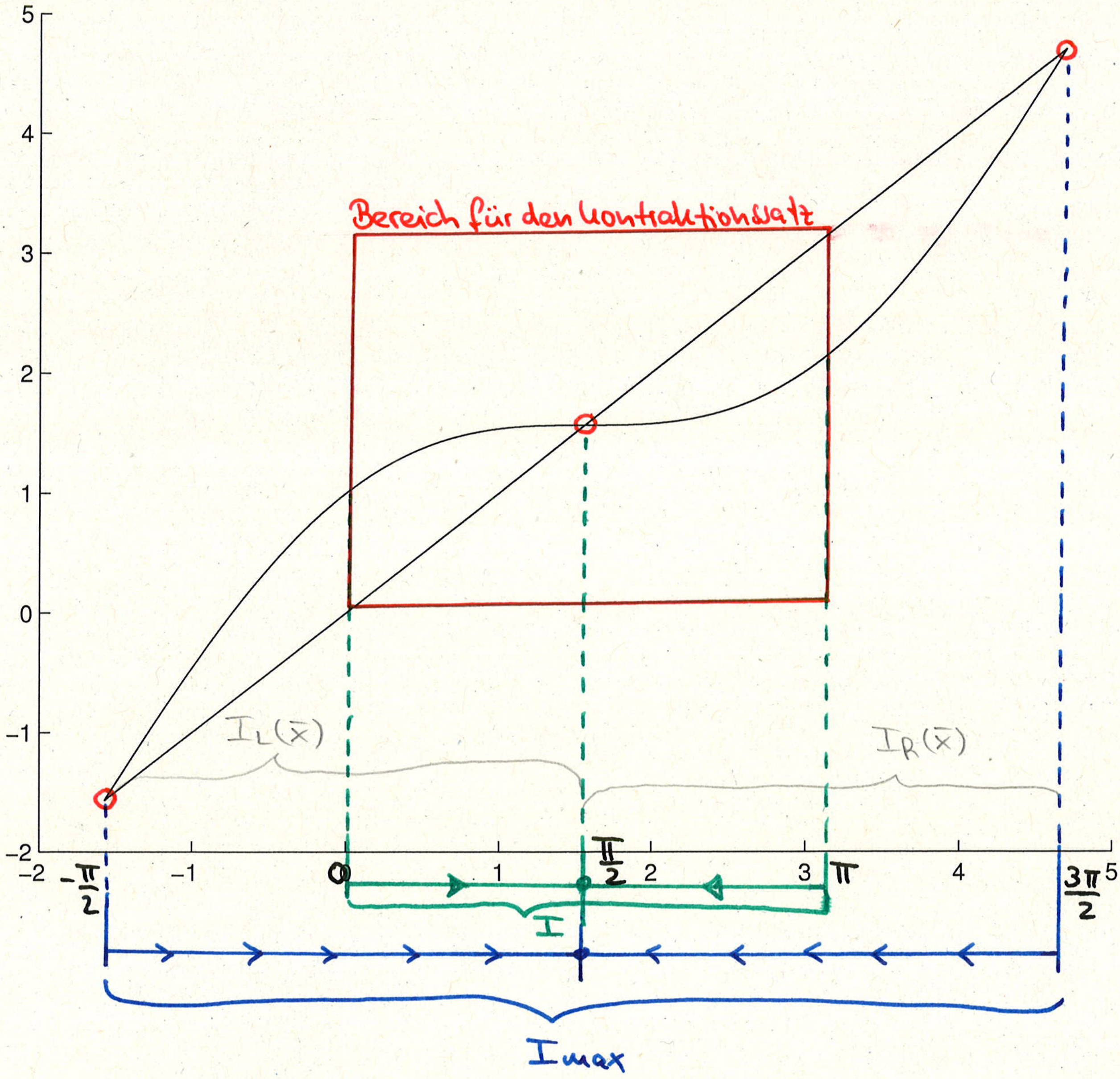
zum Einzugsbereich: zeige

1. Startet man in $]1,2[$, so landen wir grundsätzlich in $]-1,1[$. Nun gilt weiter:

$$|x-1|>|f(f(x))-1| \quad \forall x\in\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{4}\right]$$

$\tfrac{5}{4}$ = max $f(x)$





Bereich für den Kontraktionssatz
$I_L(\bar{x})$
$I_R(\bar{x})$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
I
I_{max}

AUFGABE 31: (Programmieraufgabe, Intervallhalbierung, Sekanten-Verfahren, Newton-Verfahren)

zu (a): Setze

$$f(x) = \tanh(x)$$
$$g(x) = \frac{1}{2} + \lambda x$$

Es gilt

- tanh streng monoton wachsend
- $\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1$ und $\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$
- $f'(x) = \cosh(x)^{-2}$ ist monoton wachsend in $\mathbb{R}_-$
  & " fallend in $\mathbb{R}_+$
  & $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$
  & $\max_{x\in\mathbb{R}} f'(x) = 1$

$\lambda = 0.1$

Betrachte

$$F(x) := f(x) - g(x) \overset{!}{=} 0$$

Die erste Nullstelle ist wegen $g(0) > f(0)$ und $g(-15) < f(-15)$ in $[-15, 0]$. Außerdem schneidet die Gerade g den Tangens hyperbolicus aufgrund der geringen Steigung zweimal in $\mathbb{R}_+$. Geeignete Intervallgrenzen sind dabei gegeben durch folgende Eigenschaften:

$$0.57 \approx g(\ln(2)) < \frac{3}{5} = f(\ln(2))$$
$$g(5) = 1 > f(5)$$

Wir können also die beiden Intervalle

$$[0, \ln(2)] \quad \text{und} \quad [\ln(2), 5]$$

wählen.

$\lambda = 0.5$:

Die Situation ist einfacher, wegen $f'(x) < 1 \ \forall x$, insbesondere für $x \in [0,$
gilt auf $[0,1]$

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \geq x > f(x)$$

Für $x > 1$ greift $g(x) > 1 > f(x)$, $g(0) > f(0)$ ist eh klar. Also kann nur eine Nullstelle in $\mathbb{R}_-$ existieren. Diese wird ähnlich wie bei $\lambda = 0.$ eingeschachtelt durch

$$[-3, 0]$$

wegen $g(-3) = -1$.

zu (b)-(e):

```
function aufgabe31

    func=@(x,lda) 1/2+lda*x-tanh(x);
    dfunc=@(x,lda) lda-1/(cosh(x)^2);
    eps=10^(-10);

    fprintf('\nParameter lambda = .1, 1. Nullstelle\n');
    fprintf('--------------------------------------\n\n');
    bisection(@(x) func(x,.1), -15, 0, eps);
    sekanten (@(x) func(x,.1), -15, 0, eps);
    newton1D (@(x) func(x,.1), @(x) dfunc(x,.1), -15, eps);
    newton1D (@(x) func(x,.1), @(x) dfunc(x,.1), 0,   eps);

    fprintf('\nParameter lambda = .1, 2. Nullstelle\n');
    fprintf('--------------------------------------\n\n');
    bisection(@(x) func(x,.1), 0, log(2), eps);
    sekanten (@(x) func(x,.1), 0, log(2), eps);
    newton1D (@(x) func(x,.1), @(x) dfunc(x,.1), log(2), eps);

    fprintf('\nParameter lambda = .1, 3. Nullstelle\n');
    fprintf('--------------------------------------\n\n');
    bisection(@(x) func(x,.1), log(2), 5, eps);
    sekanten (@(x) func(x,.1), log(2), 5, eps);
    newton1D (@(x) func(x,.1), @(x) dfunc(x,.1), 5,      eps);

    fprintf('\nParameter lambda = .5, einzige Nullstelle\n');
    fprintf('-------------------------------------------\n\n');
    bisection(@(x) func(x,.5), -3, 0, eps);
    sekanten (@(x) func(x,.5), -3, 0, eps);
    newton1D (@(x) func(x,.5), @(x) dfunc(x,.5), -3, eps);
    newton1D (@(x) func(x,.5), @(x) dfunc(x,.5), 0,  eps);
end

function [int,n]=bisection(F,a,b,eps)
%BISECTION Intervallhalbierung (Bisektion), berechnet die Nullstelle
%          einer Funktion F im endlichen Intervall [a,b] mit Genauigkeit
%          eps.
%   F    : Funktion von IR nach IR
%   a    : linke Intervallgrenze
%   b    : rechte Intervallgrenze
%   eps  : Genauigkeit
%   int  : Intervall mit der Nullstelle
%   n    : Anzahl der benoetigten Iterationen

    n = 0;
    fn = F(a);
    gn = F(b);
    fprintf('Intervallhalbierung\n');
    fprintf('-------------------\n');
    fprintf('n = %d, [x_n, y_n] = [%2.8f, %2.8f], (F(x_n, F(y_n)) = (%2.1e, %
2.1e)\n', n, a, b, fn, gn);
    if (F(a)*F(b) >= 0 || b<a)
        error('Falsches Anfangsintervall');
    end
```

```
    fn=F(xn);
    fn1=F(xn1);
    fprintf('Sekanten-Verfahren\n');
    fprintf('-------------------\n');
    fprintf('x_%1.0f = %2.8f, F(x_%1.0f) = %2.1e\n',0, xn1, 0, fn1);
    fprintf('x_%1.0f = %2.8f, F(x_%1.0f) = %2.1e\n',1, xn,  1, fn);
    while max(abs(fn))>eps
        n=n+1;
        tmp = xn - fn*(xn-xn1)/(fn-fn1);
        xn1 = xn;
        xn=tmp;
        fn1=fn;
        fn=F(xn);
        fprintf('x_%1.0f = %2.8f, F(x_%1.0f) = %2.1e\n',n+1,xn,n+1,fn);
    end
end
```

```
Parameter lambda = .1, 1. Nullstelle
------------------------------------
```

zu (f):

```
Intervallhalbierung
-------------------
n = 0, [x_n, y_n] = [-15.00000000, 0.00000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 5.0e-01}
n = 1, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -7.50000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 7.5e-01}
n = 2, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -11.25000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 3.7e-01}
n = 3, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -13.12500000], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 1.9e-01}
n = 4, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.06250000], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 9.4e-02}
n = 5, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.53125000], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 4.7e-02}
n = 6, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.76562500], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 2.3e-02}
n = 7, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.88281250], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 1.2e-02}
n = 8, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.94140625], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 5.9e-03}
n = 9, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.97070312], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 2.9e-03}
n = 10, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.98535156], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 1.5e-03}
n = 11, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99267578], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 7.3e-04}
n = 12, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99633789], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 3.7e-04}
n = 13, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99816895], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 1.8e-04}
n = 14, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99908447], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 9.2e-05}
n = 15, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99954224], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 4.6e-05}
n = 16, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99977112], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 2.3e-05}
n = 17, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99988556], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 1.1e-05}
n = 18, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99994278], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 5.7e-06}
n = 19, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99997139], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 2.9e-06}
n = 20, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99998569], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 1.4e-06}
n = 21, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99999285], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 7.2e-07}
n = 22, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99999642], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 3.6e-07}
n = 23, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99999821], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 1.8e-07}
n = 24, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99999911], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 8.9e-08}
n = 25, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99999955], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 4.5e-08}
n = 26, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99999978], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 2.2e-08}
n = 27, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99999989], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 1.1e-08}
n = 28, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99999994], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 5.6e-09}
n = 29, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99999997], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 2.8e-09}
n = 30, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99999999], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 1.4e-09}
n = 31, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -14.99999999], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 7.0e-10}
n = 32, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -15.00000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 3.5e-10}
n = 33, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -15.00000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 1.7e-10}
n = 34, [x_n, y_n] = [-15.00000000, -15.00000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.9e-13, 8.7e-11}
Sekanten-Verfahren
------------------
x_0 = -15.00000000, F(x_0) = -1.9e-13
x_1 = 0.00000000, F(x_1) = 5.0e-01
x_2 = -15.00000000, F(x_2) = 3.7e-13
Newton-Verfahren
----------------
x_0 = -15.00000000, F(x_0) = -1.9e-13
Newton-Verfahren
----------------
x_0 = 0.00000000, F(x_0) = 5.0e-01
x_1 = 0.55555556, F(x_1) = 5.1e-02
x_2 = 0.63440679, F(x_2) = 2.4e-03
x_3 = 0.63844225, F(x_3) = 6.3e-06
x_4 = 0.63845300, F(x_4) = 4.5e-11

Parameter lambda = .1, 2. Nullstelle
------------------------------------

Intervallhalbierung
-------------------
n = 0, [x_n, y_n] = [0.00000000, 0.69314718], {F(x_n, F(y_n)} = {5.0e-01, -3.1e-02}
n = 1, [x_n, y_n] = [0.34657359, 0.69314718], {F(x_n, F(y_n)} = {2.0e-01, -3.1e-02}
n = 2, [x_n, y_n] = [0.51986039, 0.69314718], {F(x_n, F(y_n)} = {7.4e-02, -3.1e-02}
n = 3, [x_n, y_n] = [0.60650378, 0.69314718], {F(x_n, F(y_n)} = {1.9e-02, -3.1e-02}
n = 4, [x_n, y_n] = [0.60650378, 0.64982548], {F(x_n, F(y_n)} = {1.9e-02, -6.6e-03}
n = 5, [x_n, y_n] = [0.62816463, 0.64982548], {F(x_n, F(y_n)} = {6.0e-03, -6.6e-03}
```

```
n = 6, [x_n, y_n] = [0.62816463, 0.63899506], {F(x_n, F(y_n)} = {6.0e-03, -3.2e-04}
n = 7, [x_n, y_n] = [0.63357984, 0.63899506], {F(x_n, F(y_n)} = {2.8e-03, -3.2e-04}
n = 8, [x_n, y_n] = [0.63628745, 0.63899506], {F(x_n, F(y_n)} = {1.3e-03, -3.2e-04}
n = 9, [x_n, y_n] = [0.63764125, 0.63899506], {F(x_n, F(y_n)} = {4.7e-04, -3.2e-04}
n = 10, [x_n, y_n] = [0.63831816, 0.63899506], {F(x_n, F(y_n)} = {7.8e-05, -3.2e-04}
n = 11, [x_n, y_n] = [0.63831816, 0.63865661], {F(x_n, F(y_n)} = {7.8e-05, -1.2e-04}
n = 12, [x_n, y_n] = [0.63831816, 0.63848738], {F(x_n, F(y_n)} = {7.8e-05, -2.0e-05}
n = 13, [x_n, y_n] = [0.63840277, 0.63848738], {F(x_n, F(y_n)} = {2.9e-05, -2.0e-05}
n = 14, [x_n, y_n] = [0.63844507, 0.63848738], {F(x_n, F(y_n)} = {4.6e-06, -2.0e-05}
n = 15, [x_n, y_n] = [0.63844507, 0.63846623], {F(x_n, F(y_n)} = {4.6e-06, -7.7e-06}
n = 16, [x_n, y_n] = [0.63844507, 0.63845565], {F(x_n, F(y_n)} = {4.6e-06, -1.5e-06}
n = 17, [x_n, y_n] = [0.63845036, 0.63845565], {F(x_n, F(y_n)} = {1.5e-06, -1.5e-06}
n = 18, [x_n, y_n] = [0.63845036, 0.63845301], {F(x_n, F(y_n)} = {1.5e-06, -2.0e-09}
n = 19, [x_n, y_n] = [0.63845168, 0.63845301], {F(x_n, F(y_n)} = {7.7e-07, -2.0e-09}
n = 20, [x_n, y_n] = [0.63845235, 0.63845301], {F(x_n, F(y_n)} = {3.8e-07, -2.0e-09}
n = 21, [x_n, y_n] = [0.63845268, 0.63845301], {F(x_n, F(y_n)} = {1.9e-07, -2.0e-09}
n = 22, [x_n, y_n] = [0.63845284, 0.63845301], {F(x_n, F(y_n)} = {9.4e-08, -2.0e-09}
n = 23, [x_n, y_n] = [0.63845292, 0.63845301], {F(x_n, F(y_n)} = {4.6e-08, -2.0e-09}
n = 24, [x_n, y_n] = [0.63845297, 0.63845301], {F(x_n, F(y_n)} = {2.2e-08, -2.0e-09}
n = 25, [x_n, y_n] = [0.63845299, 0.63845301], {F(x_n, F(y_n)} = {1.0e-08, -2.0e-09}
n = 26, [x_n, y_n] = [0.63845300, 0.63845301], {F(x_n, F(y_n)} = {4.1e-09, -2.0e-09}
n = 27, [x_n, y_n] = [0.63845300, 0.63845301], {F(x_n, F(y_n)} = {1.1e-09, -2.0e-09}
n = 28, [x_n, y_n] = [0.63845300, 0.63845300], {F(x_n, F(y_n)} = {1.1e-09, -4.5e-10}
n = 29, [x_n, y_n] = [0.63845300, 0.63845300], {F(x_n, F(y_n)} = {3.0e-10, -4.5e-10}
n = 30, [x_n, y_n] = [0.63845300, 0.63845300], {F(x_n, F(y_n)} = {3.0e-10, -7.6e-11}
n = 31, [x_n, y_n] = [0.63845300, 0.63845300], {F(x_n, F(y_n)} = {1.1e-10, -7.6e-11}
n = 32, [x_n, y_n] = [0.63845300, 0.63845300], {F(x_n, F(y_n)} = {1.8e-11, -7.6e-11}
Sekanten-Verfahren
------------------
x_0 = 0.00000000, F(x_0) = 5.0e-01
x_1 = 0.69314718, F(x_1) = -3.1e-02
x_2 = 0.65306803, F(x_2) = -8.4e-03
x_3 = 0.63789920, F(x_3) = 3.2e-04
x_4 = 0.63845840, F(x_4) = -3.1e-06
x_5 = 0.63845301, F(x_5) = -1.1e-09
x_6 = 0.63845300, F(x_6) = 4.3e-15
Newton-Verfahren
---------------
x_0 = 0.69314718, F(x_0) = -3.1e-02
x_1 = 0.63632258, F(x_1) = 1.2e-03
x_2 = 0.63845001, F(x_2) = 1.7e-06
x_3 = 0.63845300, F(x_3) = 3.4e-12

Parameter lambda = .1, 3. Nullstelle
-----------------------------------

Intervallhalbierung
------------------
n = 0, [x_n, y_n] = [0.69314718, 5.00000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-3.1e-02, 9.1e-05}
n = 1, [x_n, y_n] = [2.84657359, 5.00000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-2.1e-01, 9.1e-05}
n = 2, [x_n, y_n] = [3.92328680, 5.00000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.1e-01, 9.1e-05}
n = 3, [x_n, y_n] = [4.46164340, 5.00000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-5.4e-02, 9.1e-05}
n = 4, [x_n, y_n] = [4.73082170, 5.00000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-2.7e-02, 9.1e-05}
n = 5, [x_n, y_n] = [4.86541085, 5.00000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.3e-02, 9.1e-05}
n = 6, [x_n, y_n] = [4.93270542, 5.00000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-6.6e-03, 9.1e-05}
n = 7, [x_n, y_n] = [4.96635271, 5.00000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-3.3e-03, 9.1e-05}
n = 8, [x_n, y_n] = [4.98317636, 5.00000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.6e-03, 9.1e-05}
n = 9, [x_n, y_n] = [4.99158818, 5.00000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-7.5e-04, 9.1e-05}
n = 10, [x_n, y_n] = [4.99579409, 5.00000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-3.3e-04, 9.1e-05}
n = 11, [x_n, y_n] = [4.99789704, 5.00000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.2e-04, 9.1e-05}
n = 12, [x_n, y_n] = [4.99894852, 5.00000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.4e-05, 9.1e-05}
n = 13, [x_n, y_n] = [4.99894852, 4.99947426], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.4e-05, 3.8e-05}
n = 14, [x_n, y_n] = [4.99894852, 4.99921139], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.4e-05, 1.2e-05}
n = 15, [x_n, y_n] = [4.99907996, 4.99921139], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.0e-06, 1.2e-05}
n = 16, [x_n, y_n] = [4.99907996, 4.99914567], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.0e-06, 5.5e-06}
n = 17, [x_n, y_n] = [4.99907996, 4.99911282], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.0e-06, 2.2e-06}
n = 18, [x_n, y_n] = [4.99907996, 4.99909639], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.0e-06, 6.0e-07}
```

```
n = 19, [x_n, y_n] = [4.99908817, 4.99909639], {F(x_n, F(y_n)} = {-2.2e-07, 6.0e-07}
n = 20, [x_n, y_n] = [4.99908817, 4.99909228], {F(x_n, F(y_n)} = {-2.2e-07, 1.9e-07}
n = 21, [x_n, y_n] = [4.99909023, 4.99909228], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.6e-08, 1.9e-07}
n = 22, [x_n, y_n] = [4.99909023, 4.99909125], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.6e-08, 8.6e-08}
n = 23, [x_n, y_n] = [4.99909023, 4.99909074], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.6e-08, 3.5e-08}
n = 24, [x_n, y_n] = [4.99909023, 4.99909048], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.6e-08, 9.2e-09}
n = 25, [x_n, y_n] = [4.99909035, 4.99909048], {F(x_n, F(y_n)} = {-3.6e-09, 9.2e-09}
n = 26, [x_n, y_n] = [4.99909035, 4.99909042], {F(x_n, F(y_n)} = {-3.6e-09, 2.8e-09}
n = 27, [x_n, y_n] = [4.99909039, 4.99909042], {F(x_n, F(y_n)} = {-3.7e-10, 2.8e-09}
n = 28, [x_n, y_n] = [4.99909039, 4.99909040], {F(x_n, F(y_n)} = {-3.7e-10, 1.2e-09}
n = 29, [x_n, y_n] = [4.99909039, 4.99909039], {F(x_n, F(y_n)} = {-3.7e-10, 4.4e-10}
n = 30, [x_n, y_n] = [4.99909039, 4.99909039], {F(x_n, F(y_n)} = {-3.7e-10, 3.5e-11}
n = 31, [x_n, y_n] = [4.99909039, 4.99909039], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.7e-10, 3.5e-11}
n = 32, [x_n, y_n] = [4.99909039, 4.99909039], {F(x_n, F(y_n)} = {-6.5e-11, 3.5e-11}
Sekanten-Verfahren
------------------
x_0 = 0.69314718, F(x_0) = -3.1e-02
x_1 = 5.00000000, F(x_1) = 9.1e-05
x_2 = 4.98729390, F(x_2) = -1.2e-03
x_3 = 4.99909037, F(x_3) = -2.0e-09
x_4 = 4.99909039, F(x_4) = 4.3e-14
Newton-Verfahren
----------------
x_0 = 5.00000000, F(x_0) = 9.1e-05
x_1 = 4.99909039, F(x_1) = 1.5e-10
x_2 = 4.99909039, F(x_2) = -1.1e-16

Parameter lambda = .5, einzige Nullstelle
-------------------------------------------

Intervallhalbierung
--------------------
n = 0, [x_n, y_n] = [-3.00000000, 0.00000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-4.9e-03, 5.0e-01}
n = 1, [x_n, y_n] = [-3.00000000, -1.50000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-4.9e-03, 6.6e-01}
n = 2, [x_n, y_n] = [-3.00000000, -2.25000000], {F(x_n, F(y_n)} = {-4.9e-03, 3.5e-01}
n = 3, [x_n, y_n] = [-3.00000000, -2.62500000], {F(x_n, F(y_n)} = {-4.9e-03, 1.8e-01}
n = 4, [x_n, y_n] = [-3.00000000, -2.81250000], {F(x_n, F(y_n)} = {-4.9e-03, 8.7e-02}
n = 5, [x_n, y_n] = [-3.00000000, -2.90625000], {F(x_n, F(y_n)} = {-4.9e-03, 4.1e-02}
n = 6, [x_n, y_n] = [-3.00000000, -2.95312500], {F(x_n, F(y_n)} = {-4.9e-03, 1.8e-02}
n = 7, [x_n, y_n] = [-3.00000000, -2.97656250], {F(x_n, F(y_n)} = {-4.9e-03, 6.5e-03}
n = 8, [x_n, y_n] = [-3.00000000, -2.98828125], {F(x_n, F(y_n)} = {-4.9e-03, 8.0e-04}
n = 9, [x_n, y_n] = [-2.99414062, -2.98828125], {F(x_n, F(y_n)} = {-2.1e-03, 8.0e-04}
n = 10, [x_n, y_n] = [-2.99121094, -2.98828125], {F(x_n, F(y_n)} = {-6.4e-04, 8.0e-04}
n = 11, [x_n, y_n] = [-2.99121094, -2.98974609], {F(x_n, F(y_n)} = {-6.4e-04, 8.0e-05}
n = 12, [x_n, y_n] = [-2.99047852, -2.98974609], {F(x_n, F(y_n)} = {-2.8e-04, 8.0e-05}
n = 13, [x_n, y_n] = [-2.99011230, -2.98974609], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.0e-04, 8.0e-05}
n = 14, [x_n, y_n] = [-2.98992920, -2.98974609], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.0e-05, 8.0e-05}
n = 15, [x_n, y_n] = [-2.98992920, -2.98983765], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.0e-05, 3.5e-05}
n = 16, [x_n, y_n] = [-2.98992920, -2.98988342], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.0e-05, 1.2e-05}
n = 17, [x_n, y_n] = [-2.98992920, -2.98990631], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.0e-05, 1.0e-06}
n = 18, [x_n, y_n] = [-2.98991776, -2.98990631], {F(x_n, F(y_n)} = {-4.6e-06, 1.0e-06}
n = 19, [x_n, y_n] = [-2.98991203, -2.98990631], {F(x_n, F(y_n)} = {-1.8e-06, 1.0e-06}
n = 20, [x_n, y_n] = [-2.98990917, -2.98990631], {F(x_n, F(y_n)} = {-4.0e-07, 1.0e-06}
n = 21, [x_n, y_n] = [-2.98990917, -2.98990774], {F(x_n, F(y_n)} = {-4.0e-07, 3.1e-07}
n = 22, [x_n, y_n] = [-2.98990846, -2.98990774], {F(x_n, F(y_n)} = {-4.5e-08, 3.1e-07}
n = 23, [x_n, y_n] = [-2.98990846, -2.98990810], {F(x_n, F(y_n)} = {-4.5e-08, 1.3e-07}
n = 24, [x_n, y_n] = [-2.98990846, -2.98990828], {F(x_n, F(y_n)} = {-4.5e-08, 4.3e-08}
n = 25, [x_n, y_n] = [-2.98990837, -2.98990828], {F(x_n, F(y_n)} = {-9.2e-10, 4.3e-08}
n = 26, [x_n, y_n] = [-2.98990837, -2.98990832], {F(x_n, F(y_n)} = {-9.2e-10, 2.1e-08}
n = 27, [x_n, y_n] = [-2.98990837, -2.98990835], {F(x_n, F(y_n)} = {-9.2e-10, 1.0e-08}
n = 28, [x_n, y_n] = [-2.98990837, -2.98990836], {F(x_n, F(y_n)} = {-9.2e-10, 4.6e-09}
n = 29, [x_n, y_n] = [-2.98990837, -2.98990836], {F(x_n, F(y_n)} = {-9.2e-10, 1.8e-09}
n = 30, [x_n, y_n] = [-2.98990837, -2.98990836], {F(x_n, F(y_n)} = {-9.2e-10, 4.4e-10}
n = 31, [x_n, y_n] = [-2.98990837, -2.98990836], {F(x_n, F(y_n)} = {-2.4e-10, 4.4e-10}
n = 32, [x_n, y_n] = [-2.98990837, -2.98990837], {F(x_n, F(y_n)} = {-2.4e-10, 1.0e-10}
n = 33, [x_n, y_n] = [-2.98990837, -2.98990837], {F(x_n, F(y_n)} = {-6.9e-11, 1.0e-10}
n = 34, [x_n, y_n] = [-2.98990837, -2.98990837], {F(x_n, F(y_n)} = {-6.9e-11, 1.6e-11}
```

```
Sekanten-Verfahren
------------------
x_0 = -3.00000000, F(x_0) = -4.9e-03
x_1 = 0.00000000, F(x_1) = 5.0e-01
x_2 = -2.97061911, F(x_2) = 9.4e-03
x_3 = -3.02782492, F(x_3) = -1.9e-02
x_4 = -2.98989360, F(x_4) = 7.2e-06
x_5 = -2.98990835, F(x_5) = 5.5e-09
x_6 = -2.98990837, F(x_6) = -1.7e-15
Newton-Verfahren
----------------
x_0 = -3.00000000, F(x_0) = -4.9e-03
x_1 = -2.98991042, F(x_1) = -1.0e-06
x_2 = -2.98990837, F(x_2) = -4.2e-14
Newton-Verfahren
----------------
x_0 = 0.00000000, F(x_0) = 5.0e-01
x_1 = 1.00000000, F(x_1) = 2.4e-01
x_2 = -1.97911756, F(x_2) = 4.7e-01
x_3 = -3.08819160, F(x_3) = -4.8e-02
x_4 = -2.99008134, F(x_4) = -8.5e-05
x_5 = -2.98990837, F(x_5) = -3.0e-10
x_6 = -2.98990837, F(x_6) = 1.1e-16
```