Übungen zur Vorlesung Numerik I
Sommersemester 2010

PD Dr. Thorsten Hüls
Dipl.-Math. Denny Otten

Übungsblatt 12
01.07.2010

Abgabe: Donnerstag, 08.07.2010, 10:00 Uhr in das Postfach des jeweiligen Tutors.
Mo.-Tutorium: Paul Voigt, paulvoigt@web.de, Postfach 195 in V3-128
Di.-Tutorium: Denny Otten, dotten@math.uni-bielefeld.de, Postfach 44 in V3-128
Mi.-Tutorium: Ingwar Petersen, ipeterse@math.uni-bielefeld.de, Postfach 227 in V3-128

Aufgabe 32: (Newton-Verfahren, Konvergenzordnung, Newton-Iterierte)
Betrachten Sie das (klassische) Newton-Verfahren in der Form

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

das zur Berechnung einer Nullstelle $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ einer gegebenen Funktion $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ dient.

(a) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = x^4$.

(i) Welche lokale Konvergenzordnung ist hierbei laut allgemeiner Konvergenztheorie zu erwarten?

(ii) Geben Sie die Newton-Iterierten $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zum Startwert $x_0 = 1$ explizit an.

(iii) Bestimmen Sie die Konvergenzordnung der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Sei $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$F(x) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & & \\ 2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 2 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \sin(x_m) \\ \sin(x_{m-1}) \\ \vdots \\ \sin(x_1) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

(i) Geben Sie das im Newton-Verfahren auftretende lineare Gleichungssystem für diese Funktion explizit an.

(ii) Untersuchen Sie, ob die LR-Zerlegung ohne Pivotisierung ausgeführt werden kann.

(6 Punkte)

Aufgabe 33: (Programmieraufgabe, Zellmodell, Newton-Verfahren)
Betrachten Sie das folgende nichtlineare Gleichungssystem, das den stationären Zustand eines Systems diffusiv gekoppelter chemischer Zellen beschreibt:

$$-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1} = \lambda g(y_i), \quad i = 1, \dots, m \tag{1}$$

mit $g(y) = \exp\left(\frac{y}{1+2y}\right)$ (exotherme Reaktion) und $y_0 = y_{m+1} = 1$.

(a) Implementieren Sie das Newton-Verfahren sowie das vereinfachte Newton-Verfahren. Hierbei soll die Iteration abbrechen, wenn der maximale Defekt $\|F(y^n)\|_\infty$ kleiner als 10^{-5} ist, wobei y^n der n–te Iterationsvektor ist und das Gesamtsystem als $F(y) = 0$ geschrieben wird. Verwenden Sie als Startvektor für die Iteration jeweils den Nullvektor und zum Lösen des lineare Gleichungssystems die MATLAB interne Routine $A\backslash b$.

(b) Lösen Sie mit jedem der beiden Verfahren aus (a) die nichtlineare Gleichung (1) für $(\lambda, m) = (0.1, 100)$, $(\lambda, m) = (0.5, 100)$ und $(\lambda, m) = (10^{-7}, 100000)$ (`sparse` verwenden).

(c) Messen Sie die Rechenzeit bei allen sechs Berechnungen.

(d) Geben Sie jeweils die Anzahl der Iterationen aus.

(e) Erzeugen Sie abschließend jeweils einen Plot der Näherungslösung (6 Plots).

(6 Punkte)

Aufgabe 34: (Newton-Richtung ist Abstiegsrichtung)
Sei $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Weiter gelte:

$$\exists \bar{x} \in \mathbb{R}^m : \quad F(\bar{x}) \neq 0 \quad \text{und} \quad F'(\bar{x}) \text{ ist invertierbar.}$$

Setze $d := -F'(\bar{x})^{-1}F(\bar{x})$. Zeigen Sie:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \quad \|F(\bar{x} + \varepsilon d)\| < \|F(\bar{x})\| \quad \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Dies bedeutet, dass der Defekt in der Newton-Richtung abnimmt.

(6 Punkte)

Bonusaufgabe 35: (Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens)
Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $F \in C^4(J, \mathbb{R})$ und $\bar{x} \in J$ eine doppelte Nullstelle von F, d. h. $\bar{x}$ erfüllt

$$F(\bar{x}) = 0, \; F'(\bar{x}) = 0, \; F''(\bar{x}) \neq 0.$$

Man zeige, dass das Newton-Verfahren lokal mindestens linear konvergent bei $\bar{x}$ ist. **Hinweis:** Man verwende die Regel von l'Hospital.

(6 Bonuspunkte)

Aufgabe 32:

zu (a):

zu (i):

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1} F(x_n) \quad \text{, Def. Newton-Verf.}$$
$$= x_n - (4 \cdot x_n^3)^{-1} \cdot x_n^4 \quad \text{, Def. } F(x) := x^4$$
$$= x_n - \frac{x_n^4}{4 \cdot x_n^3} \quad \text{, invertiere } F'(x_n) = 4 \cdot x_n^3$$
$$= x_n - \frac{1}{4} x_n = \frac{3}{4} x_n \quad \text{, subtrahiere}$$

zu (ii): $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2, \dots$. Folge der Newton-Iterierten:

$$x_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

zu (iii): Vorbemerkung: Da $F'(\bar{x}) = F'(0) = 4 \cdot 0^3 = 0$ nicht invertierbar ist, können wir Satz 8.4 (Konvergenzsatz für das Newton-Verfahren) nicht anwenden. Stattdessen werden wir für die Bestimmung der lokalen Konvergenzordnung die Bemerkung nach Definition 8.3 an, um ein möglichst großes p zu finden, so dass die Ungleichung

$$\| x_{n+1} - \bar{x} \| \leq C \cdot \| x_n - \bar{x} \|^p$$

erfüllt ist. Hier kann man nur $C = \frac{3}{4}$ und $p = 1$ finden.

Es gilt:

$$\| x_{n+1} - \bar{x} \| \underset{(ii) \,\&\, \bar{x}=0}{=} \left\| \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \right\| = \frac{3}{4} \cdot \left\| \left(\frac{3}{4}\right)^n \right\| \underset{(ii) \,\&\, \bar{x}=0}{=} \frac{3}{4} \cdot \| x_n - \bar{x} \|^1$$

Die Konvergenzordnung der Folge der Newton-Iterierten ist wegen $p = 1$ lediglich linear (und <u>nicht</u> quadratisch (vgl. Satz 8.4)).

zu (b):

zu (i): $x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1} F(x_n)$

$$\Rightarrow \quad x_n - x_{n+1} = F'(x_n)^{-1} F(x_n)$$
$$\Rightarrow \quad F'(x_n) \cdot \underbrace{(x_n - x_{n+1})}_{=: x} = F(x_n)$$
$$\Rightarrow \quad \text{Gleichungssystem:} \quad F'(x_n) \cdot x = F(x_n)$$

Hierbei ist die Ableitung von F gegeben durch

$$F'(\xi) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & & \cos(\xi_m) \\ & & ⋰ & \\ & ⋰ & & \\ \cos(\xi_1) & & & 0 \end{pmatrix}$$

Zu (ii): Um Satz 7.2 anwenden zu können, ist

zz: $A := F'(\xi)$ ist strikt diagonaldominant (d.h. $|A_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |A_{ij}| \; \forall i = 1,\dots,m$)

1. Fall: (m ungerade)

Es gilt:

$$i = \frac{m+1}{2} : \quad |A_{ii}| = |5 + \cos(\xi_i)| \geq 4 \; (>3)$$

$-1 \leq \cos(\xi_i) \leq 1$

$\Rightarrow 4 \leq 5 + \cos(\xi_i) \leq 6$

$\Rightarrow 4 \leq |5 + \cos(\xi_i)| \leq 6$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |A_{ij}| = 2 + 1 = 3$$

$$i \neq \frac{m+1}{2} : \quad |A_{ii}| = 5 \; (>4)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |A_{ij}| = 2 + 1 + |\cos(\xi_i)| \leq 4$$

$-1 \leq \cos(\xi_i) \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq |\cos(\xi_i)| \leq 1$

$\Rightarrow F'(\xi)$ ist strikt diagonaldominant

2. Fall: (m gerade)

Es gilt:

$$i = \frac{m}{2} : \quad |A_{ii}| = 5 \; (>4)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |A_{ij}| = 2 + |1 - \cos(\xi_i)| \leq 4$$

$-1 \leq \cos(\xi_i) \leq 1$

$\Rightarrow 1 \geq -\cos(\xi_i) \geq -1$

$\Rightarrow 2 \geq 1 - \cos(\xi_i) \geq 0$

$\Rightarrow 0 \leq |1 - \cos(\xi_i)| \leq 2$

$$i = \frac{m}{2} + 1 : \quad |A_{ii}| = 5 \; (>4)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |A_{ij}| = |2 - \cos(\xi_i)| + 1 \leq 4$$

$-1 \leq \cos(\xi_i) \leq 1$

$\Rightarrow 1 \geq -\cos(\xi_i) \geq -1$

$\Rightarrow 3 \geq 2 - \cos(\xi_i) \geq 1$

$\Rightarrow 1 \leq |2 - \cos(\xi_i)| \leq 3$

$i \neq \frac{m}{2}, \frac{m}{2}+1$: siehe 1. Fall für $i \neq \frac{m+1}{2}$.

$\Rightarrow F'(\xi)$ ist strikt diagonaldominant.

Damit kann die LR-Zerlegung nach Satz 7.3 ohne Pivotisierung durchgeführt werden.

---

m gerade: (z.B. $m = 4$)

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -\cos(\xi_4) \\ 2 & 5 & 1-\cos(\xi_3) & 0 \\ 0 & 2-\cos(\xi_2) & 5 & 1 \\ -\cos(\xi_1) & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

m ungerade: (z.B. $m = 5$)

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & -\cos(\xi_5) \\ 2 & 5 & 1 & -\cos(\xi_4) & 0 \\ 0 & 2 & 5-\cos(\xi_3) & 1 & 0 \\ 0 & -\cos(\xi_2) & 2 & 5 & 1 \\ -\cos(\xi_1) & 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

```
function aufgabe33
    % ------------------------
    % | Initialisierung |
    % ------------------------
    % 1. Reaktionsfunktion (exotherme Reaktion)
    %g = @(y) exp(y./(1+2.*y));
    %dg = @(y) exp(y./(1+2.*y))./(1+2.*y).^2;
    % 2. Reaktionsfunktion: (katalytische Reaktion)
    %g  =  @(y) -y./(pi+y);
    %dg =  @(y) -pi./(pi+y).^2;
    % 3. Reaktionsfunktion:
    g = @(y) exp(y./-(1+2.*y));
    dg = @(y) -exp(y./-(1+2.*y))./(1+2.*y).^2;

    % ----------------
    % | Berechnung |
    % ----------------
    tic; [sol1,iter1]=zellmodell(g,dg,100,0.1,0); zeit1=toc;
    tic; [sol2,iter2]=zellmodell(g,dg,100,0.1,1); zeit2=toc;
    tic; [sol3,iter3]=zellmodell(g,dg,100,0.5,0); zeit3=toc;
    tic; [sol4,iter4]=zellmodell(g,dg,100,0.5,1); zeit4=toc;
    tic; [sol5,iter5]=zellmodell(g,dg,100000,10^(-7),0); zeit5=toc;
    tic; [sol6,iter6]=zellmodell(g,dg,100000,10^(-7),1); zeit6=toc;

    % ---------------------------
    % | Ausgaben und Plot |
    % ---------------------------
    fprintf('Newton-Verfahren,          lambda = %1.0e, Iterationen: %2.0f,
benoetigte Zeit %6.6f\n', 0.1, iter1, zeit1);
    fprintf('vereinf. Newton-Verfahren, lambda = %1.0e, Iterationen: %2.0f,
benoetigte Zeit %6.6f\n', 0.1, iter2, zeit2);
    fprintf('Newton-Verfahren,          lambda = %1.0e, Iterationen: %2.0f,
benoetigte Zeit %6.6f\n', 0.5, iter3, zeit3);
    fprintf('vereinf. Newton-Verfahren, lambda = %1.0e, Iterationen: %2.0f,
benoetigte Zeit %6.6f\n', 0.5, iter4, zeit4);
    fprintf('Newton-Verfahren,          lambda = %1.0e, Iterationen: %2.0f,
benoetigte Zeit %6.6f\n', 10^(-7), iter5, zeit5);
    fprintf('vereinf. Newton-Verfahren, lambda = %1.0e, Iterationen: %2.0f,
benoetigte Zeit %6.6f\n', 10^(-7), iter6, zeit6);

    figure

    subplot(2,3,1)
    bar(0:100+1,[1;sol1;1])
    legend('Newton')
    axis([-0.5 101+.5 0 max([1;sol1])]);
    title(char(['Zellenmodell, lambda = ',num2str(0.1),', ',...
        int2str(iter1),' Iterationsschritte']));

    subplot(2,3,4)
    bar(0:100+1,[1;sol2;1],'r')
    legend('vereinf. Newton')
    axis([-0.5 101+.5 0 max([1;sol2])]);
    title(char(['Zellenmodell, lambda = ',num2str(0.1),', ',...
        int2str(iter2),' Iterationsschritte']));
```

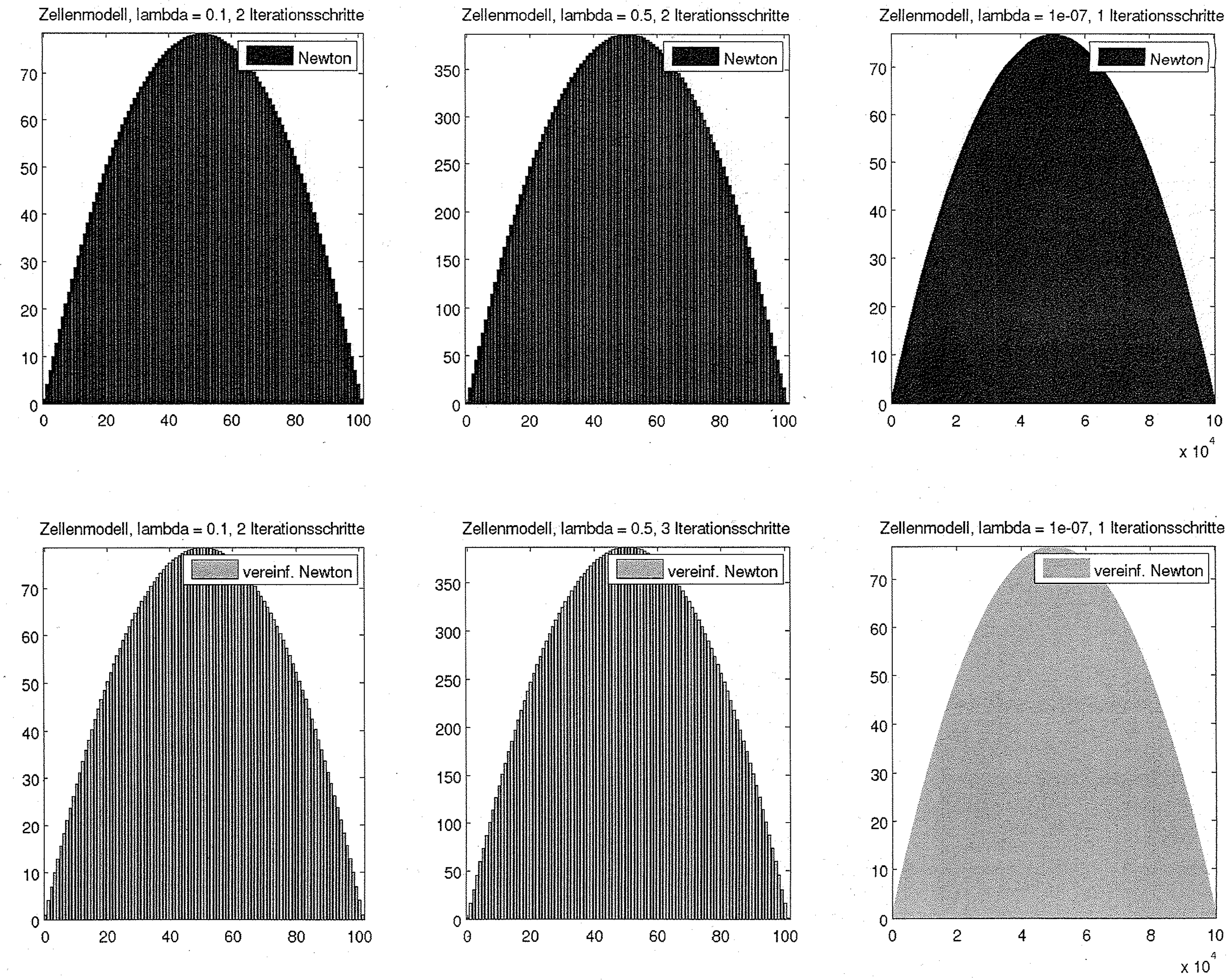
```
    subplot(2,3,2)
    bar(0:100+1,[1;sol3;1])
    legend('Newton')
    axis([-0.5 101+.5 0 max([1;sol3])]);
    title(char(['Zellenmodell, lambda = ',num2str(0.5), ', ',...
        int2str(iter3),' Iterationsschritte']));

    subplot(2,3,5)
    bar(0:100+1,[1;sol4;1],'r')
    legend('vereinf. Newton')
    axis([-0.5 101+.5 0 max([1;sol4])]);
    title(char(['Zellenmodell, lambda = ',num2str(0.5),', ',...
        int2str(iter4),' Iterationsschritte']));

    subplot(2,3,3)
    bar(0:100000+1,[1;sol5;1])
    legend('Newton')
    axis([-0.5 100001+.5 0 max([1;sol5])]);
    title(char(['Zellenmodell, lambda = ',num2str(10^(-7)),', ',...
        int2str(iter5),' Iterationsschritte']));

    subplot(2,3,6)
    bar(0:100000+1,[1;sol6;1],'r')
    legend('vereinf. Newton')
    axis([-0.5 100001+.5 0 max([1;sol6])]);
    title(char(['Zellenmodell, lambda = ',num2str(10^(-7)),', ',...
        int2str(iter6),' Iterationsschritte']));
end

function [y,n]=zellmodell(g,dg,m,lda,newton_type)
%ZELLMODELL
%    g           : Reaktionsfunktion
%    dg          : Ableitung der Reaktionsfunktion
%    m           : Anzahl der Zellen
%    lda         : lambda (Systemparameter zur Beeinflussung d.
%                  Reaktionsfunktion)
%    newton_type : 0 = Newton-Verfahren
%                  1 = vereinfachtes Newton-Verfahren
%    y           : Konzentrationen der m Zellen
%    n           : Anzahl der benoetigten Iterationen

    D = sparse(1:m,1:m,-2*ones(1,m),m,m);
    E = sparse(2:m,1:m-1,ones(1,m-1),m,m);
    A = E+D+E';

    G  = @(ym) lda*g(ym) + [1; zeros(m-2,1); 1];
    F  = @(ym) A*ym+G(ym);
    DF = @(ym) A + sparse(1:m, 1:m, lda*dg(ym),m,m);

    % 1. Reaktionsfunktion (exotherme Reaktion)
    %[z,n] = newton(F, DF, m*ones(m,1),10^(-5),newton_type);
    % 2. Reaktionsfunktion (katalytische Reaktion)
    %[z,n] = newton(F, DF, zeros(m,1),10^(-15),newton_type);
    % 3. Reaktionsfunktion
```

```
    [y,n] = newton(F, DF, m*ones(m,1),10^(-5),newton_type);
end

function [nst,n]=newton(F,dF,x0,eps,newton_einfach)
%NEWTON1D Eindimensionales Newton-Verfahren zur Berechnung von Nullstellen
%         einer Funktion F
%    F                 : Funktion
%    dF                : Ableitung der Funktion
%    x0                : Startwert
%    eps               : Genauigkeit
%    newton_einfach    : 0 = Newton-Verfahren
%                        1 = vereinfachtes Newton-Verfahren
%    nst               : Nullstelle der Funktion
%    n                 : Anzahl der benoetigten Iterationen

    n = 0;
    xn = x0;
    yn = F(xn);
    if newton_einfach
        A0=dF(x0);
        while max(abs(yn))>eps
            n = n+1;
            %xn = xn - GSV(A0,yn,10^(-10));
            %xn = xn - LR(A0,yn,1);
            xn = xn - A0\yn;
            yn = F(xn);
        end
    else
        while max(abs(yn))>eps
            n = n+1;
            %xn = xn - GSV(dF(xn),yn,10^(-10));
            %xn = xn - LR(dF(xn),yn,1);
            xn = xn - dF(xn)\yn;
            yn = F(xn);
        end
    end
    nst=xn;
end

function [y,iter]=GSV(A,b,eps)
%GSV Gesamtschrittverfahren, ein iteratives Verfahren zum Loesen linearer
%    Gleichungssysteme (mit strikt diagonaldominanter Matrix)
%   A      : quadratische, strikt diagonaldominante Matrix des LGS's
%   b      : rechte Seite des LGS's
%   eps    : Toleranz, Fehlergenauigkeit
%   y      : Loesung des LGS's
%   iter   : Anzahl der Iterationen, bis zum erreichen der Genauigkeit

    % Initialisierung
    [m,n]=size(A);
    y=m*ones(m,1);      % Startwert der Iteration
    yn=2*ones(m,1);
    iter=0;

    % ---------------------------------------------------------------
```

```
    % |  1. Schritt: Bestimme M=D und N=L+R  |
    % --------------------------------------
    %sparse(1:m,1:m,-2*ones(1,m),m,m);
    M=sparse(diag(diag(A)));
    N=sparse(M-A);
    Mi=sparse(diag(1./diag(A)));
    MiN=Mi*N;
    Mib=Mi*b;

    % --------------------------------------
    % |  2. Schritt: Bestimme M=D und N=L+R  |
    % --------------------------------------
    while norm(y-yn,1)>eps
        iter=iter+1;
        yn=y;
        y=MiN*yn+Mib;
    end
    norm(MiN,inf)
end

function [y,pivot]=LR(A,b,pivot_type)
%LR LR-Faktorisierung, LR-Zerlegung
%   A            : quadratische Matrix des LGS's
%   b            : rechte Seite des LGS's
%   pivot_type   : Typ der Pivotisierung
%                  1 : ohne Pivotisierung
%                  2 : absolute Spaltenpivotisierung
%                  3 : relative Spaltenpivotisierung
%   y            : Loesung des LGS's
%   pivot        : Werte an den Pivotstellen

    % Initialisierung
    m=length(b);          % Bestimmung der Dimension des LGS's
    y=zeros(m,1);         % Loesung
    r=zeros(1,m);         % Pivotstellen
    tau=zeros(1,m);       % Hilfsvektor
    pivot=zeros(m-1,1);   % Pivotwerte

    % ----------------------
    % |  1. Schritt: PA=LR  |
    % ----------------------
    for k=1:m-1
        % A. Pivotisierung:
        % A.1. ohne Pivotisierung
        if pivot_type==1
            r(k)=k;
            pivot(k)=A(k,k);
        % A.2. absolute Spaltenpivotisierung
        elseif pivot_type==2
            Amax=0;
            for i=k:m
                if abs(A(i,k))>Amax
                    Amax=A(i,k);
                    r(k)=i;
                    pivot(k)=A(i,k);
```

```
                end
            end
        % A.3. relative Spaltenpivotisierung
        elseif pivot_type==3
            Amax=0;
            for i=k:m
                si=0;
                for j=k:m
                    si=si+abs(A(i,j));
                end
                if abs(A(i,k))/si>Amax
                    Amax=abs(A(i,k))/si;
                    r(k)=i;
                    pivot(k)=A(i,k);
                end
            end
        end

        % B. Zeilentausch
        if (r(k)~=k)
            tau(1,:)=A(k,:);
            A(k,:)=A(r(k),:);
            A(r(k),:)=tau(1,:);
        end

        % C. Elementare Zeilenumformung
        for i=k+1:m
            A(i,k)=A(i,k)/A(k,k);
            for j=k+1:m
                A(i,j)=A(i,j)-A(i,k)*A(k,j);
            end
        end
    end

    % --------------------
    % |  2. Schritt: PB  |
    % --------------------
    for k=1:m-1
        if(r(k)~=k)
           tau(1,1)=b(k);
           b(k)=b(r(k));
           b(r(k))=tau(1,1);
        end
    end
    %Anmerkung: Pb=b

    % ---------------------
    % |  3. Schritt: Lu=Pb  |
    % ---------------------
    for i=2:m
        for j=1:i-1
            b(i)=b(i)-A(i,j)*b(j);
        end
    end
    %Anmerkung: u=b
```

```
    % ---------------------
    % |  4. Schritt: Ry=u  |
    % ---------------------
    for i=m:-1:1
        for j=i+1:m
            b(i)=b(i)-A(i,j)*b(j);
        end
        b(i)=b(i)/A(i,i);
    end

    y(:,1)=b;
end
```



Zellenmodell, lambda = 0.1, 2 Iterationsschritte
Newton
Zellenmodell, lambda = 0.5, 2 Iterationsschritte
Newton
Zellenmodell, lambda = 1e-07, 1 Iterationsschritte
Newton
x 10^4
Zellenmodell, lambda = 0.1, 2 Iterationsschritte
vereinf. Newton
Zellenmodell, lambda = 0.5, 3 Iterationsschritte
vereinf. Newton
Zellenmodell, lambda = 1e-07, 1 Iterationsschritte
vereinf. Newton
x 10^4

```
Newton-Verfahren,          lambda = 1e-01, Iterationen:  2, benoetigte Zeit 0.010354
vereinf. Newton-Verfahren, lambda = 1e-01, Iterationen:  2, benoetigte Zeit 0.005276
Newton-Verfahren,          lambda = 5e-01, Iterationen:  2, benoetigte Zeit 0.001939
vereinf. Newton-Verfahren, lambda = 5e-01, Iterationen:  3, benoetigte Zeit 0.001197
Newton-Verfahren,          lambda = 1e-07, Iterationen:  1, benoetigte Zeit 0.091157
vereinf. Newton-Verfahren, lambda = 1e-07, Iterationen:  1, benoetigte Zeit 0.080443
```

Aufgabe 34:

$(\mathbb{R}^m, \|.\|)$ normierter Raum, $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar, weiter gelte

$$\exists\, \bar{x} \in \mathbb{R}^m : F(\bar{x}) \neq 0 \text{ und } F'(\bar{x}) \text{ invertierbar}$$

Setze $d := -F'(\bar{x})^{-1} F(\bar{x})$.

$$\text{zz: } \exists\, \varepsilon_0 > 0 : \quad \|F(\bar{x} + \varepsilon \cdot d)\| < \|F(\bar{x})\| \quad \forall\, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

Beweis: Da $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 1-mal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^m$ ist und $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$, gilt nach der Taylor-Formel

$$F(\bar{x} + h) = F(\bar{x}) + DF(\bar{x})h + \phi(h) \tag{34.1}$$

wobei

$$\phi(h) = \mathcal{O}(\|h\|^2) \qquad \text{„}\phi \text{ wächst nicht wesentlich schneller als } \|h\|^2\text{"}$$

letzteres bedeutet (mit $h := \varepsilon d$, $h \to \infty$)

$$\limsup_{\varepsilon \to \infty} \frac{\|\phi(\varepsilon d)\|}{\|\varepsilon d\|^2} < \infty$$

Daraus folgt

$$\exists\, \varepsilon_0 < 1 \;\forall\, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 : \|\phi(\varepsilon d)\| \leq \varepsilon \cdot \|F(\bar{x})\| \tag{34.2}$$

Damit folgt die Behauptung durch

$$\begin{aligned}
\|F(\bar{x} + \varepsilon d)\| &\underset{\substack{\text{Taylor-}\\\text{Formel}}}{\overset{(34.1)}{=}} \|F(\bar{x}) + DF(\bar{x})\varepsilon d + \phi(\varepsilon d)\| \\
&\underset{\text{Def von } d}{=} \|F(\bar{x}) - \varepsilon \underbrace{DF(\bar{x}) \cdot DF(\bar{x})^{-1}}_{= id} F(\bar{x}) + \phi(\varepsilon d)\| \\
&\underset{\Delta\text{'s Ungl.}}{\leq} (1 - \varepsilon)\|F(\bar{x})\| + \|\phi(\varepsilon d)\| \\
&\underset{(34.2)}{\leq} (1 - \varepsilon)\|F(\bar{x})\| + \varepsilon \cdot \|F(\bar{x})\| \\
&= \|F(\bar{x})\| \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Hinweis (Ergänzung) zu (34.2):

$$\begin{aligned}
\exists\, C > 0 \;\forall\, \varepsilon d > 0 : \|\phi(\varepsilon d)\| &\overset{\phi(h) = \mathcal{O}(\|h\|^2)}{\leq} C \cdot \|\varepsilon d\|^2 \\
&= C \cdot \varepsilon^2 \cdot \|DF(\bar{x})^{-1} F(\bar{x})\|^2 \\
&\qquad \varepsilon_0 := \frac{\|F(\bar{x})\|}{C \cdot \|DF(\bar{x})^{-1} F(\bar{x})\|^2} \\
&\underset{\varepsilon \leq \varepsilon_0}{\leq} \varepsilon \cdot \|F(\bar{x})\|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exists\, \varepsilon_0 < 1 \;\forall\, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 : \|\phi(\varepsilon d)\| \leq \varepsilon \cdot \|F(\bar{x})\|$$

BONUSAUFGABE 35: (Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens)

Gegeben:

$J \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall

$F \in C^4(J, \mathbb{R})$

$\bar{x} \in J$ doppelte Nullstelle von F (d.h. $F(\bar{x}) = 0$, $F'(\bar{x}) = 0$, $F''(\bar{x}) \neq 0$)

Zeige: Newton-Verfahren ist lokal mindestens linear konvergent gegen $\bar{x}$

Beweis: Wir verwenden Satz 8.5 (ii) für $p = 1$. Zur Erinnerung:

> **SATZ:** $D \subset \mathbb{R}$ offen, $G : D \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in D$ Fixpunkt von G.
> Weiter gelte
>
> ①: $G \in C^1(D, \mathbb{R})$
>
> ②: $\rho(G'(\bar{x})) < 1$ (SATZ VON OSTROWSKI)
>
> $\Rightarrow$ Das Newton-Verfahren ist lokal mindestens linear konvergent gegen $\bar{x}$, d.h.
>
> $\exists\, U = U(\bar{x}) \subset D \;\forall x_0 \in U$: $\begin{cases} \text{(i): Die Folge } x_{n+1} = G(x_n) \text{ existiert} \\ \text{(ii): } (x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ konvergiert mind. linear gegen } \bar{x}, \text{ d.h.} \end{cases}$
>
> $\exists\, 0 < C \underset{\substack{\uparrow \\ p=1}}{<} 1 : \|x_{n+1} - \bar{x}\| \leq C \cdot \|x_n - \bar{x}\| \quad \forall n \geq 0$

(Newton-Verfahren: $x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1} F(x_n)$).

- Zu G und dem Definitionsbereich: Betrachte die Verfahrensfunktion

$$G(x) := x - \frac{F(x)}{F'(x)}$$

Diese Funktion ist zunächst nur in einer offenen Umgebung $U \setminus \{\bar{x}\} = U(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$ wohldefiniert. Denn wegen $\boxed{F''(\bar{x}) \neq 0}$ finden wir immer eine Umgebung U mit $F''(x) \neq 0 \;\forall x \in U$. Zunächst einmal ist G noch nicht im Punkt $\bar{x}$ wohldefiniert, da nach Voraussetzung $\boxed{F'(\bar{x}) = 0}$ gilt. G lässt sich in $\bar{x}$ jedoch stetig fortsetzen:

$$G(\bar{x}) := \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in U\setminus\{\bar{x}\}}} G(x) = \bar{x} - \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in U\setminus\{\bar{x}\}}} \frac{F(x)}{F'(x)} \underset{\uparrow}{=} \bar{x} - \underbrace{\lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in U\setminus\{\bar{x}\}}} \frac{F'(x)}{F''(x)}}_{=0 \,(\text{denn } \boxed{F'(\bar{x})=0} \text{ und } \boxed{F''(\bar{x}) \neq 0})} = \bar{x}$$

$F(x) \xrightarrow{x \to \bar{x}} \boxed{F(\bar{x}) = 0}$

$F'(x) \longrightarrow \boxed{F'(\bar{x}) = 0}$

$\Rightarrow$ Regel von L'Hospital

Daher betrachten wir

$$\underset{\substack{\cap \text{offen} \\ \mathbb{R}}}{G : U} \to \mathbb{R} \quad \text{mit } G(x) := x - \frac{F(x)}{F'(x)}$$

- Zu ①: Wir zeigen zunächst die Differenzierbarkeit von G in $U \setminus \{\bar{x}\}$:
  - $x \in U$, $x \neq \bar{x}$:

$$G'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Quotientenregel}}}{=} 1 - \frac{F'(x)^2 - F''(x) \cdot F(x)}{F'(x)^2} = \frac{F''(x) \cdot F(x)}{F'(x)^2}$$

G' lässt sich stetig in $\bar{x}$ fortsetzen:

• $x \in U,\ x = \bar{x}$

$$G'(\bar{x}) := \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in U\setminus\{\bar{x}\}}} G'(x) = \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in U\setminus\{\bar{x}\}}} \frac{F''(x)\cdot F(x)}{F'(x)^2}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{F(\bar{x})=0} \\ \boxed{F'(\bar{x})=0}}}{=} \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in U\setminus\{\bar{x}\}}} \frac{F^{(3)}(x)\cdot F(x) + F^{(2)}(x)\cdot F^{(1)}(x)}{2\cdot F^{(1)}(x)\cdot F^{(2)}(x)}$$

⇒ Regel von L'Hospital

$$= \frac{1}{2} + \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in U\setminus\{\bar{x}\}}} \frac{F^{(3)}(x)\cdot F(x)}{2\cdot F^{(1)}(x)\cdot F^{(2)}(x)}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{F(\bar{x})=0} \\ \boxed{F'(\bar{x})=0}}}{=} \frac{1}{2} + \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in U\setminus\{\bar{x}\}}} \underbrace{\frac{F^{(4)}(x)\cdot \overbrace{F(x)}^{\to F(\bar{x})=0} + F^{(3)}(x)\cdot \overbrace{F^{(1)}(x)}^{\to F'(\bar{x})=0}}{2\Big(\underbrace{F^{(2)}(x)^2}_{\to F''(\bar{x})^2} + \underbrace{F^{(1)}(x)}_{\to F'(\bar{x})=0}\cdot F^{(3)}(x)\Big)}}_{\neq 0 \ \to\ \frac{0}{2\cdot F''(\bar{x})} = 0} \tag{35.1}$$

⇒ Regel von L'Hospital

$$= \frac{1}{2}$$

Somit gilt $G \in C^1(U, \mathbb{R})$, also ①.

• zu ②: Es gilt:

$$\rho(G'(\bar{x})) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 7.3}}}{\leq} \|G'(\bar{x})\| \underset{\substack{\uparrow \\ (35.1)}}{=} \frac{1}{2} \overset{!}{<} 1$$

• Damit folgt die Behauptung aus Satz 8.5.